

PROBLEMA 3.15

Rotolamento puro e traiettorie **

Un cilindro di raggio R rotola senza strisciare all'interno di una cavità, anche essa cilindrica, di raggio $2R$. Inizialmente il cilindro si trova nella posizione in Figura 3.8. Determinare la traiettoria del punto P appartenente al cilindro inizialmente al centro della cavità.

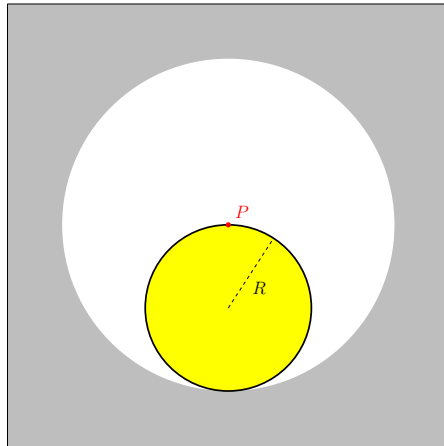


Figura 3.8.: Il cilindro (in giallo) di raggio R e la cavità cilindrica (di raggio $2R$) che lo contiene.

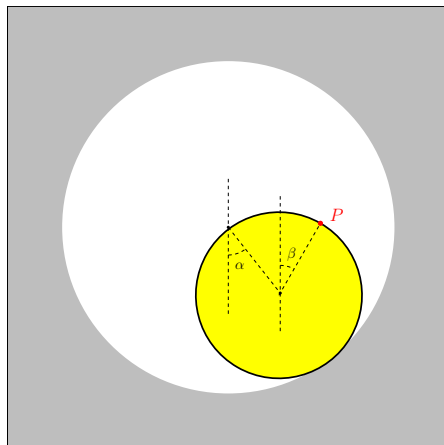
Soluzione

Figura 3.9.: Le coordinate α e β utilizzate per descrivere il moto del cilindro. Entrambi gli angoli sono considerati crescenti in senso antiorario (nel caso rappresentato, $\alpha > 0$ e $\beta < 0$).

Il centro del cilindro si muove su una circonferenza di raggio R centrata sulla cavità. Scegliamo le coordinate α e β come in Figura 3.9. Rispetto ad un sistema di coordinate con origine al centro della cavità le coordinate del punto P saranno:

$$\begin{aligned}x_P &= R \sin \alpha - R \sin \beta \\y_P &= -R \cos \alpha + R \cos \beta\end{aligned}$$

La condizione di puro rotolamento mette in relazione gli angoli α e β . Per trovare questa relazione possiamo osservare che la velocità del punto di contatto tra cilindro e cavità vale

$$v = R\dot{\alpha} + R\dot{\beta}$$

ma questa velocità deve essere nulla, per cui $\dot{\alpha} = -\dot{\beta}$. Integrando troviamo

$$\alpha = -\beta + C$$

e dato che inizialmente $\alpha = \beta = 0$ abbiamo $C = 0$. Di conseguenza

$$\begin{aligned}x_P &= 2R \sin \alpha \\y_P &= 0\end{aligned}$$

e il punto P si muove sul diametro orizzontale della cavità, $y_P = 0$ e $-2R \leq x_P \leq 2R$.