PROBLEMA 5.102

Piccole perturbazioni di un'orbita circolare ⋆⋆⋆

Un pianeta si muove in un campo di forze centrali descritto da un potenziale della forma

$$U(r) = -\frac{k}{r}e^{-r/r_0}$$

dove k e r_0 sono costanti positive. Determinate il periodo dell'orbita circolare di raggio r_0, e studiare le orbite non circolari vicine ad essa.

Soluzione

Per un'orbita circolare deve essere

$$-mr\omega^2 = -\frac{\partial U}{\partial r} = -\left(\frac{k}{r^2} + \frac{k}{rr_0}\right)e^{-r/r_0}$$

da cui

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{mer_0^3}{2k}}$$

L'energia del sistema si può scrivere nella forma

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}e^{-r/r_0}$$

Per l'orbita circolare sappiamo che ed inoltre

$$E = E_0 = 0$$

Intoduciamo una piccola perturbazione del sistema, ponendo

$$\begin{aligned} L^2 &= L_0^2 + \Delta_{L^2} \\ E &= \Delta_E \end{aligned}$$

Introducendo una nuova coordinata proporzionale alla deviazione radiale dalla traiettoria circolare,

$$r = r_0 + \delta$$

possiamo scrivere l'energia del sistema nella forma

$$\Delta_E = \frac{1}{2}m\dot{\delta}^2 + \frac{L_0^2 + \Delta_{L^2}}{2m\left(r_0+\delta\right)^2} - \frac{ke^{-1}}{r_0+\delta}e^{-\delta/r_0}$$

Sviluppando al secondo ordine in δ otteniamo

$$\begin{aligned} \Delta_E &= \frac{1}{2}m\dot{\delta}^2 + \frac{L_0^2}{2mr_0^2}\left(1 + \frac{\Delta_{L^2}}{L_0^2}\right)\frac{1}{\left(1+\delta/r_0\right)^2} - \frac{k}{er_0}\frac{1}{1+\delta/r_0}e^{-\delta/r_0} \\ &\simeq \frac{1}{2}m\dot{\delta}^2 + \frac{L_0^2}{2mr_0^2}\left(1 + \frac{\Delta_{L^2}}{L_0^2}\right)\left(1 - 2\frac{\delta}{r_0} + 3\frac{\delta^2}{r_0^2}\right) - \frac{k}{er_0}\left(1 - \frac{\delta}{r_0} + \frac{\delta^2}{r_0^2}\right)\left(1 - \frac{\delta}{r_0} + \frac{1}{2}\frac{\delta^2}{r_0^2}\right) \end{aligned}$$

CC BY NC SA

dove sono state utilizzate le approssimazioni, valide per $x \ll 1$,

$$\begin{aligned}
(1+x)^{\alpha} &\simeq 1+\alpha x+\frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)x^2 \\
e^x &\simeq 1+x+\frac{1}{2}x^2
\end{aligned}$$

Sviluppando i prodotti otteniamo

$$\begin{aligned}
\Delta_E = & \frac{L_0^2}{2mr_0^2}-\frac{k}{er_0} \\
& +\frac{\Delta_{L^2}}{2mr_0^2}-\frac{L_0^2}{mr_0^2}\frac{\delta}{r_0}+\frac{2k}{er_0}\frac{\delta}{r_0} \\
& +\frac{1}{2}m\dot{\delta}^2-\frac{\Delta_{L^2}}{mr_0^2}\frac{\delta}{r_0}+\frac{3L_0^2}{2mr_0^2}\frac{\delta^2}{r_0^2}-\frac{5k}{2er_0}\frac{\delta^2}{r_0^2}
\end{aligned}$$

I primi due termini sommano ad $E_0=0$. Nella seconda riga, i termini lineari in δ si cancellano dato che l'orbita circolare è nel minimo del potenziale efficace corrispondente a $L=L_0$. Alla fine rimane

$$\begin{aligned}
\Delta_E-\frac{\Delta_{L^2}}{2mr_0^2} &= \frac{1}{2}m\dot{\delta}^2+\left(\frac{3L_0^2}{2mr_0^2}-\frac{5k}{2er_0}\right)\frac{\delta^2}{r_0^2}-\frac{\Delta_{L^2}}{mr_0^2}\frac{\delta}{r_0} \\
&= \frac{1}{2}m\dot{\delta}^2+\frac{1}{2}\frac{k}{er_0}\frac{\delta^2}{r_0^2}-\frac{\Delta_{L^2}}{mr_0^2}\frac{\delta}{r_0}
\end{aligned}$$

La nuova energia corrisponde ad un oscillatore armonico: infatti derivando rispetto al tempo otteniamo l'equazione del moto

$$m\ddot{\delta}+\frac{k}{er_0^3}\delta=\frac{\Delta_{L^2}}{mr_0^3}$$

Notare che se $\Delta_{L^2}=0$ l'oscillazione radiale avviene attorno all'orbita circolare precedente. In caso contrario attorno a una nuova orbita circolare di raggio

$$\delta=\frac{e\Delta_{L^2}}{mk}$$

In ogni caso la frequenza delle oscillazioni radiali sarà data da

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{emr_0^3}}$$

Per studiare la traiettoria scriviamo l'energia nella forma

$$\begin{aligned}
\Delta_E-\frac{\Delta_{L^2}}{2mr_0^2} &= \frac{1}{2}m\left(\frac{d\delta}{d\theta}\dot{\theta}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{k}{er_0}\frac{\delta^2}{r_0^2}-\frac{\Delta_{L^2}}{mr_0^2}\frac{\delta}{r_0} \\
&= \frac{1}{2}m\left(\frac{d\delta}{d\theta}\frac{L_0^2}{2mr_0^2}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{k}{er_0}\frac{\delta^2}{r_0^2}-\frac{\Delta_{L^2}}{mr_0^2}\frac{\delta}{r_0}
\end{aligned}$$

Notare che al secondo ordine nella deviazione è stato sufficiente sostituire $\dot{\theta}$ con il suo valore imperturbato della traiettoria circolare originaria. Di conseguenza l'orbita si può chiudere solo se la frequenza delle oscillazioni radiali appena determinata è in rapporto razionale con l'inverso del periodo di rotazione, determinato precedentemente. Ma nel caso considerato questo non è vero, dato che

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2k}{mer_0^3}} = f\sqrt{2}$$

CC BY NC SA