PROBLEMA 5.145

Pallina in caduta su guida circolare ⋆⋆

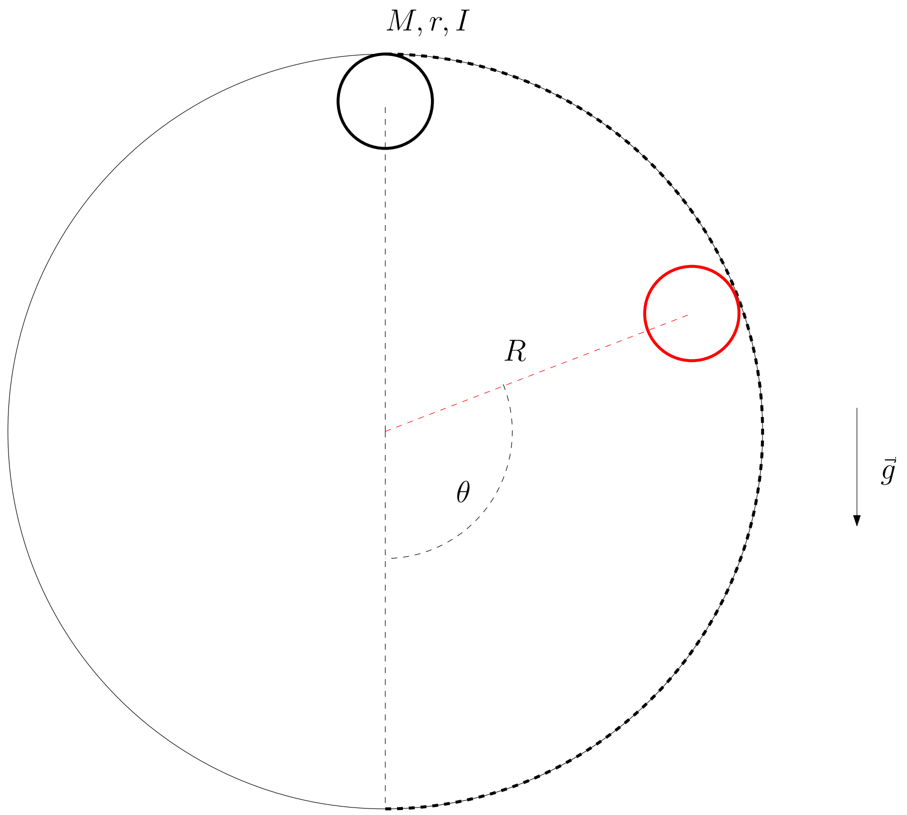

Figura 5.124.: La pallina vincolata a rimanere in contatto con la guida circolare nella posizione iniziale (in nero) ed in una posizione intermedia qualsiasi (in rosso). Il tratteggio sulla metà a destra indica il vincolo di puro rotolamento.

Una pallina di massa M, raggio r e momento di inerzia I rispetto ad un asse passante per il centro di massa è vincolata a rimanere in contatto con una guida circolare di raggio R, come in Figura 5.124. Inizialmente si trova in quiete nel punto più in alto ($\theta = \pi$). Sulla metà di destra della guida la pallina è anche vincolata ad un moto di puro rotolamento. Sulla metà di sinistra invece è assente qualunque attrito.

Si sposte leggermente la pallina, e questa inizia a cadere. Calcolare la massima altezza alla quale il centro di massa riesce ad arrivare prima di fermarsi nuovamente, sul lato sinistro della guida.

Successivamente il moto continua, e la pallina torna sul lato destro fino a fermarsi nuovamente. Calcolare la nuova altezza raggiunta.

Soluzione

Durante la discesa dal lato destro della guida l'energia si conserva, e può essere scritta come

$$E = \frac{1}{2}\left(I + Mr^2\right)\omega^2 - Mg\left(R - r\right)\cos\theta$$

di conseguenza confrontando l'energia iniziale ($\theta = \pi$, $\omega = 0$) con quella al momento di arrivo nel punto più basso ($\theta = 0$, $\omega = \omega_1$) troviamo

$$\frac{1}{2}\left(I + Mr^2\right)\omega_f^2 = 2Mg\left(R - r\right)$$

da cui

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{4Mg\left(R - r\right)}{I + Mr^2}}$$

Dato che la velocità del centro di massa è legata a ω dalla condizione di puro rotolamento avremo

$$v_1 = -\omega_1 r = -\sqrt{\frac{4Mgr^2\left(R - r\right)}{I + Mr^2}}$$

Nella risalita dal lato sinistro la velocità del centro di massa e quella angolare sono indipendenti. L'energia si scriverà allora come

$$E = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 - Mg\left(R - r\right)\cos\theta$$

Inoltre si conserverà il momento angolare della pallina rispetto al suo centro di massa

$$L = I\omega$$

dato che il momento della forza di gravità e della reazione normale della guida è nullo rispetto ad esso. Chiaramente anche la velocità angolare si conserverà. Ponendo l'energia iniziale uguale a quella nel punto più alto raggiunto ($v = 0$) abbiamo quindi

$$\frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2}I\omega_1^2 - Mg\left(R - r\right) = \frac{1}{2}I\omega_1^2 - Mg\left(R - r\right)\cos\theta_1$$

che permette di calcolare l'angolo corrispondente alla posizione più in alto

$$\cos\theta_1 = -1 + 2\frac{\frac{I}{Mr^2}}{1 + \frac{I}{Mr^2}}$$

Per $I \ll Mr^2$ si ha $\cos\theta_1 \simeq -1$, cioè la pallina ritorna alla stessa posizione di partenza. Per $I \gg Mr^2$ si ha $\cos\theta_1 \simeq 1$, ossia la pallina rimane vicino al punto più basso. Notare che per $I = Mr^2$ si ottiene $\cos\theta_1 = 0$, cioè $\theta_1 = -\pi/2$.

Tornando indietro la pallina arriva nel punto più basso con

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_1 \\ v &= \omega_1 r \end{aligned}$$

e quindi non si trova in condizioni di puro rotolamento (la velocità v ha il segno sbagliato). Al momento dell'entrata nel lato di destra la guida applicherà un impulso nel punto di contatto, che però non cambierà il momento angolare rispetto ad esso. Quindi avremo

$$I\omega_1 - Mr\omega_1 r = \left(I + Mr^2\right)\omega_2$$

che permette di calcolare la velocità angolare iniziale sul lato destro,

$$\omega_2 = \frac{I - Mr^2}{I + Mr^2}\omega_1$$

La velocità angolare cambia segno per $I < Mr^2$. Se $I > Mr^2$ la pallina "rimbalza" e risale nuovamente dal lato sinistro. Noratare però che per una pallina non si può avere $I > Mr^2$ (sarebbe necessario distribuire a distanze maggiori di r dall'asse di rotazione passante per il centro di massa). Usando adesso la conservazione dell'energia possiamo nuovamente determinare l'angolo corrispondente all'altezza massima raggiunta

$$\frac{1}{2}\left(I + Mr^2\right)\omega_2^2 - Mg\left(R - r\right) = -Mg\left(R - r\right)\cos\theta_2$$

da cui

$$\cos\theta_2 = -1 + 8\frac{\frac{I}{Mr^2}}{\left(1 + \frac{I}{Mr^2}\right)^2}$$

Notare che $\cos\theta = -1$ solo se $I = 0$. In tutti gli altri casi l'altezza massima finale è maggiore di quella iniziale. Questo è dovuto al fatto che nel passaggio tra il lato sinistro e il lato destro viene dissipata energia. Il valore massimo di $\cos\theta_2$ si ottiene per $I = Mr^2$ ($\cos\theta_2 = 1$). In quel caso la pallina rimane sul fondo, dissipando interamente la propria energia.