PROBLEMA 5.150

Manubrio in orbita: piccole perturbazioni II ⋆⋆

Studiare le piccole perturbazioni delle orbite determinate nell'Esercizio 5.126, considerando il caso $\phi = \pi/2$. Per semplicità si può considerare la lunghezza del manubrio molto minore del raggio dell'orbita, e supporre che l'orbita del centro di massa rimanga imperturbata.

Soluzione

In questo caso l'equazione cardinale (5.147.1) diviene, ponendo $\phi = \pi/2 + \delta\phi$

$$\begin{aligned}
\ddot{\phi} &= -\frac{r_0 k}{2a}\left[\frac{1}{\left(r^2+a^2+2ar\delta\phi\right)^{3/2}} - \frac{1}{\left(r^2+a^2-2ar\delta\phi\right)^{3/2}}\right] \\
&= -\frac{r_0 k}{2a\left(r_0^2+a^2\right)^{3/2}}\left[\frac{1}{\left(1+\frac{2ar}{r_0^2+a^2}\delta\phi\right)^{3/2}} - \frac{1}{\left(1-\frac{2ar}{r_0^2+a^2}\delta\phi\right)^{3/2}}\right] \\
&\simeq \frac{3kr_0^2}{\left(r_0^2+a^2\right)^{5/2}}\delta\phi
\end{aligned}$$

Non abbiamo in questo caso oscillazioni, ma una instabilità esponenziale che si sviluppa con un tempo caratteristico

$$\tau = \sqrt{\frac{\left(r_0^2+a^2\right)^{5/2}}{3kr_0^2}} \simeq \sqrt{\frac{r_0^3}{3k}} \simeq \frac{1}{\sqrt{3}\omega_0}$$

La posizione del manubrio considerata è dunque instabile.