PROBLEMA 5.38

Diffusione da una buca ⋆⋆

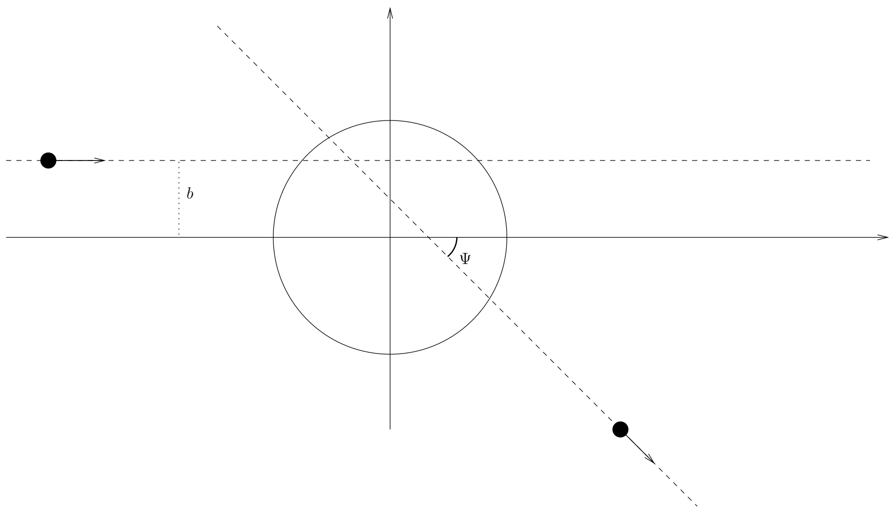

Figura 5.29.: Il piano orizzontale e la cavità circolare viste dall'alto.

In un piano orizzontale è praticata una cavità circolare, di raggio R e profondità h. I bordi della cavità sono arrotondati, ed un punto materiale di massa m è vincolato a muoversi sulla superficie risultante. Inizialmente il punto materiale si muove all'esterno della cavità, con velocità di modulo v_0 e parametro d'urto b, come in Figura 5.29.

Determinare le quantità conservate, e l'angolo di diffusione Ψ all'uscita della buca, in funzione dei parametri specificati.

Soluzione

Le quantità conservate sono l'energia totale (cinetica più potenziale gravitazionale) e la componente verticale del momento angolare rispetto al centro della buca. Quest'ultima si conserva perché le forze che agiscono sulla particella sono normali al piano (forza di gravità sempre, e reazione vincolare quando la particella non è sul bordo della buca) oppure radiali (reazione vincolare quando la particella si trova sul bordo). Nel primo caso il momento della forza non ha componente verticale, nel secondo caso è nullo.

All'interno e all'esterno della buca la particella si muoverà di moto rettilineo uniforme. Resta da determinare come i diversi pezzi di traiettoria si raccordano tra di loro.

Facendo riferimento alla Figura 5.30, è anzitutto chiaro che $\alpha = \gamma$. Questo perchè, come vedremo tra breve, le due leggi di conservazione precedentemente citate sono sufficienti a determinare univocamente β in funzione di α. Inoltre

1. Data una soluzione $\vec{r}(t)$ che soddisfa alle equazioni del moto, anche la soluzione invertita nel tempo $\vec{r}(-t)$ le soddisfa (le forze dipendono solo dalla posizione)

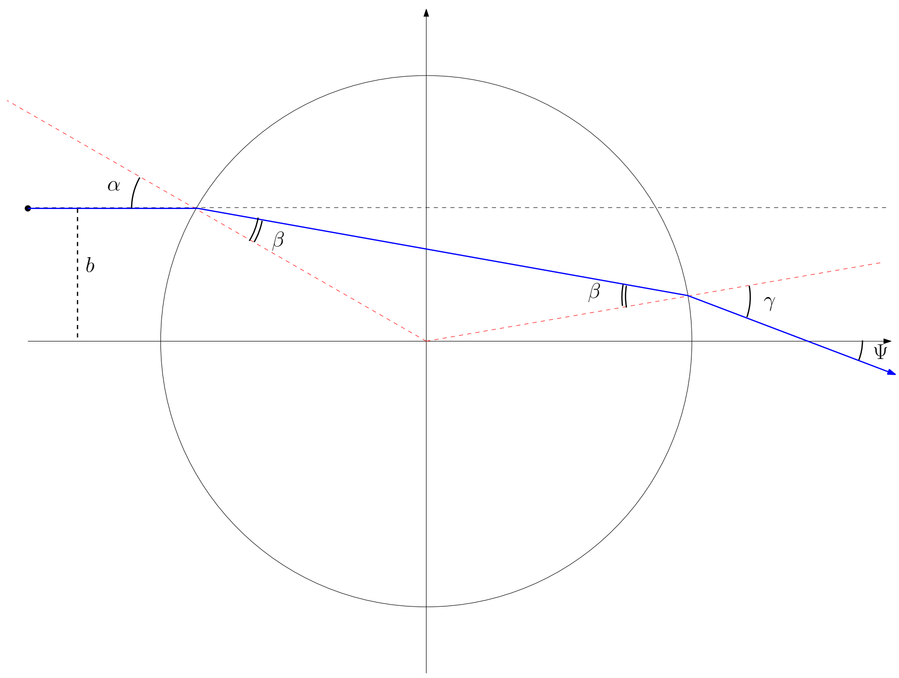

Figura 5.30.: Una possibile traiettoria della particella.

2. Invertendo nel tempo una soluzione l'entrata nella buca diventa una uscita da essa. Quindi la legge che lega α e β è la stessa che lega γ a β.

Eguagliamo adesso la conservazione dell'energia e del momento angolare, tra un istante nel quale la particella è fuori dalla buca e uno in cui si trova al suo interno. Abbiamo

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 - mgh \tag{5.38.1}$$

e

$$-mv_0 b = -mvR\sin\beta \tag{5.38.2}$$

Dall'Equazione (5.38.2) segue

$$v = \frac{v_0 b}{R\sin\beta} \tag{5.38.3}$$

Ricavando v^2 dalla conservazione dell'energia e sostituendo abbiamo quindi quindi (tenendo conto che $b/R = \sin\alpha$)

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta} = 1 + \frac{2gh}{v_0^2} \tag{5.38.4}$$

ossia

$$\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1+\frac{2gh}{v_0^2}}}$$

Dato che $\Psi = 2(\alpha - \beta)$ otteniamo

$$\Psi = 2 \arcsin\left(\frac{b}{R}\right) - 2 \arcsin\left(\frac{b}{R\sqrt{1+\frac{2gh}{v_0^2}}}\right)$$

Da notare che si sarebbe potuto utilizzare anche la conservazione della componente tangenziale al bordo della buca della quantità di moto, ottenendo la relazione

$$mv_0 \sin\alpha = mv \sin\beta \tag{5.38.5}$$

equivalente alla (5.38.2).