PROBLEMA 5.51

Pendolo doppio ⋆⋆⋆

Scrivere le equazioni del moto del pendolo doppio rappresentato in Figura 5.40. Studiare le piccole oscillazioni del sistema attorno alla posizione di equilibrio stabile.

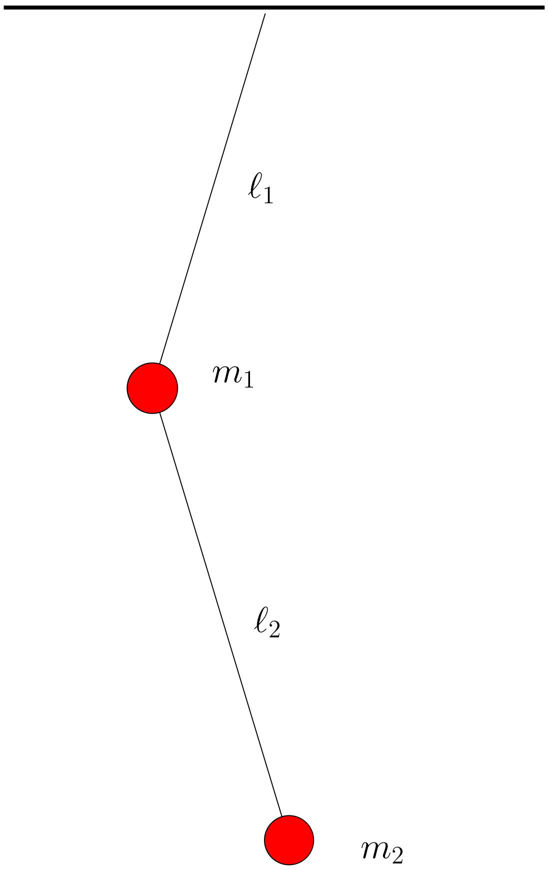

Figura 5.40.: Il pendolo doppio considerato nell'esercizio.

Soluzione

Introduciamo i due versori $\hat{n}_1$ e $\hat{n}_2$ allineati con la direzione dei due fili. La posizione delle due masse si scriverà allora

$$
\begin{aligned}
\vec{r}_1 &= \ell_1 \hat{n}_1 \\
\vec{r}_2 &= \ell_1 \hat{n}_1 + \ell_2 \hat{n}_2
\end{aligned}
$$

dove, esplicitamente,

$$\hat{n}_1 = \begin{pmatrix} \sin\theta_1 \\ -\cos\theta_1 \end{pmatrix}, \qquad \hat{n}_2 = \begin{pmatrix} \sin\theta_2 \\ -\cos\theta_2 \end{pmatrix}$$

Derivando rispetto al tempo otteniamo le velocità

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \ell_1\dot{\theta}_1\hat{\tau}_1 \\ \vec{v}_2 &= \ell_1\dot{\theta}_1\hat{\tau}_1 + \ell_2\dot{\theta}_2\hat{\tau}_2 \end{aligned}$$

e le accelerazioni

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 &= \ell_1\ddot{\theta}_1\hat{\tau}_1 - \ell_1\dot{\theta}_1^2\hat{n}_1 \\ \vec{a}_2 &= \ell_1\ddot{\theta}_1\hat{\tau}_1 - \ell_1\dot{\theta}_1^2\hat{n}_1 + \ell_2\ddot{\theta}_2\hat{\tau}_2 - \ell_2\dot{\theta}_2^2\hat{n}_2 \end{aligned}$$

con

$$\hat{\tau}_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\tau}_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 \end{pmatrix}$$

Possiamo scrivere adesso le equazioni del moto. Per la prima massa abbiamo

$$m_1\ell_1\left(\ddot{\theta}_1\hat{\tau}_1 - \dot{\theta}_1^2\hat{n}_1\right) = -T_1\hat{n}_1 + T_2\hat{n}_2 - m_1 g\hat{y} \tag{5.51.1}$$

e per la seconda

$$m_2\left[\ell_1\left(\ddot{\theta}_1\hat{\tau}_1 - \dot{\theta}_1^2\hat{n}_1\right) + \ell_2\left(\ddot{\theta}_2\hat{\tau}_2 - \dot{\theta}_2^2\hat{n}_2\right)\right] = -T_2\hat{n}_2 - m_2 g\hat{y}\,. \tag{5.51.2}$$

Le (5.51.3) e (5.51.4) sono 4 equazioni differenziali nelle incognite θ_1, θ_2, T_1 e T_2.

Per piccole oscillazioni sviluppiamo le equazioni al primo ordine nelle variabili θ_1, θ_2, $\dot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_2$. Questo significa che possiamo porre

$$\hat{n}_1 \simeq \begin{pmatrix} \theta_1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\hat{y} + \theta_1\hat{x}, \qquad \hat{n}_2 \simeq \begin{pmatrix} \theta_2 \\ -1 \end{pmatrix} = -\hat{y} + \theta_2\hat{x}\,,$$

$$\hat{\tau}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} = \hat{x} + \theta_1\hat{y}, \qquad \hat{\tau}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \hat{x} + \theta_2\hat{y}\,.$$

e a meno di termini di ordine superiore le equazioni divengono

$$m_1\ell_1\ddot{\theta}_1\hat{x} = -T_1(-\hat{y} + \theta_1\hat{x}) + T_2(-\hat{y} + \theta_2\hat{x}) - m_1 g\hat{y} \tag{5.51.3}$$

$$m_2\left(\ell_1\ddot{\theta}_1 + \ell_2\ddot{\theta}_2\right)\hat{x} = -T_2(-\hat{y} + \theta_2\hat{x}) - m_2 g\hat{y}\,. \tag{5.51.4}$$

In direzione verticale questo significa

$$T_1 = (m_1 + m_2)g$$

$$T_2 = m_2 g$$

cioè le tensioni non dipendono dall'angolo. In direzione orizzontale si trova

$$m_1\ell_1\ddot{\theta}_1 = -T_1\theta_1 + T_2\theta_2$$
$$m_2\left(\ell_1\ddot{\theta}_1 + \ell_2\ddot{\theta}_2\right) = -T_2\theta_2$$

che si potevano ottenere sin dall'inizio notando che per piccole oscillazioni

$$\begin{aligned} x_1 &= \ell_1\theta_1 \\ x_2 &= \ell_1\theta_1 + \ell_2\theta_2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} F_{1,x} &= -T_1\theta_1 + T_2\theta_2 \\ F_{2,x} &= -T_2\theta_2 \end{aligned}$$

Abbiamo quindi

$$\ell_1\ddot{\theta}_1 = -(1 + m_2/m_1)g\theta_1 + m_2/m_1 g\theta_2$$
$$\ell_1\ddot{\theta}_1 + \ell_2\ddot{\theta}_2 = -g\theta_2\,.$$

Sottraendo la prima equazione dalla seconda abbiamo infine

$$\ddot{\theta}_1 + (1 + \frac{m_2}{m_1})\frac{g}{\ell_1}\theta_1 - \frac{m_2}{m_1}\frac{g}{\ell_1}\theta_2 = 0$$

$$\ddot{\theta}_2 - (1 + \frac{m_2}{m_1})\frac{g}{\ell_2}\theta_1 + \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)\frac{g}{\ell_2}\theta_2 = 0$$

Cerchiamo delle soluzioni del tipo

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} e^{i\Omega t}$$

Sostituendo otteniamo ($\gamma = m_2/m_1$, $\omega_i^2 = g/\ell_i$)

$$\begin{pmatrix} (1+\gamma)\omega_1^2 - \Omega^2 & -\gamma\omega_1^2 \\ -(1+\gamma)\omega_2^2 & (1+\gamma)\,\omega_2^2 - \Omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che avrà soluzioni non banali solo quando il determinante della prima matrice è nullo, cioè per particolari valori di Ω legati alle frequenze dei modi di oscillazione.