PROBLEMA 5.56

Pendolo mobile ⋆⋆

Nel pendolo in Figura 5.44 la massa superiore è libera di muoversi orizzontalmente. Determinare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio.

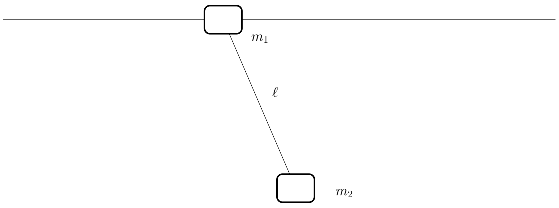

Figura 5.44.: Il pendolo mobile considerato. La massa superiore può scorrere orizzontalmente e non vi è attrito.

Soluzione

Possiamo usare come coordinate l'ascissa x della massa superiore e l'angolo di inclinazione del pendolo θ. L'energia cinetica si scrive

$$K = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\left[\left(\dot{x}+\ell\dot{\theta}\cos\theta\right)^2 + \ell^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta\right]$$

ossia

$$K = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\left[\ell^2\dot{\theta}^2 + 2\ell\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta\right]$$

L'energia potenziale vale invece

$$U = -m_2 g\ell\cos\theta$$

Si conserva inoltre la quantità di moto orizzontale, e nel sistema del centro di massa possiamo scrivere

$$m_1\dot{x} + m_2\left(\dot{x}+\ell\dot{\theta}\cos\theta\right) = 0$$

da cui

$$\dot{x} = -\frac{m_2\ell\dot{\theta}\cos\theta}{m_1+m_2}$$

Il minimo del potenziale si ha per $\theta = 0$, e per piccole oscillazioni attorno a questa posizione di equilibrio stabile si ha

$$K \simeq \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\left[\ell^2\dot{\theta}^2 + 2\ell\dot{x}\dot{\theta}\right]$$

$$U \simeq \frac{1}{2}m_2 g\ell\theta^2 + \text{costante}$$

$$\dot{x} \simeq -\frac{m_2 \ell \dot{\theta}}{m_1 + m_2}$$

Eliminando $\dot{x}$ tramite l'ultima relazione si trova

$$E \simeq \frac{1}{2} \left[\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right] \ell^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 g \ell \theta^2$$

riconoscibile come energia di un oscillatore di frequenza

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m_2}{\mu} \frac{g}{\ell}}$$

La frequenza risulta aumentata rispetto a un pendolo semplice da un fattore uguale alla radice quadrata del rapporto tra m_2 e la massa ridotta del sistema:

$$\frac{m_2}{\mu} = 1 + \frac{m_2}{m_1}$$