PROBLEMA 5.57

Pendolo sospeso ⋆⋆⋆

Nel sistema in Figura 5.45 la massa m_1 può muoversi solo verticalmente, ed è vincolata al soffitto tramite una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. Alla massa m_1 è inoltre fissato un pendolo di lunghezza ℓ e massa m_2, libero di oscillare.

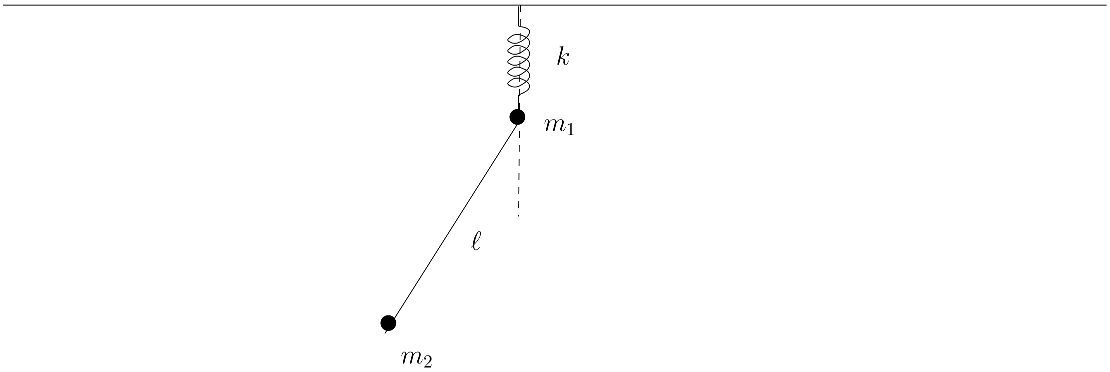

Figura 5.45.: Il pendolo sospeso considerato nell'esercizio.

Scrivere le equazioni del moto del sistema e studiare il suo comportamento per piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio.

Soluzione

Studiamo il sistema in un riferimento non inerziale solidale con la massa m_1. Ci riduciamo in questo modo ad un pendolo semplice sottoposto alla forza apparente

$$\vec{F} = -m_2 \ddot{y} \hat{y}$$

dove abbiamo indicato con y la posizione del punto di sospensione superiore della molla rispetto a m_1. Abbiamo allora per l'accelerazione tangenziale

$$m_2 \ell \ddot{\theta} = -m_2 \left(g + \ddot{y} \right) \sin \theta$$

e per quella radiale

$$m_2 \ell \dot{\theta}^2 = T - m_2 (g + \ddot{y}) \cos \theta$$

La condizione di equilibrio per la massa m_1 è

$$0 = -m_1 \ddot{y} - ky - T \cos \theta - m_1 g$$

Per piccole oscillazioni attorno $\theta = 0$ queste equazioni si riducono a

$$m_2 \ell \ddot{\theta} = -m_2 g \theta \tag{5.57.1}$$

$$T = m_2 g + m_2 \ddot{y}$$

e

$$(m_1 + m_2)\,\ddot{y} + ky = -\,(m_1 + m_2)\,g \tag{5.57.2}$$

La (5.57.1) è l'equazione del moto di un pendolo di frequenza

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

la (5.57.2) quella di un oscillatore con posizione di equilibrio

$$y_0 = \frac{(m_1 + m_2)g}{k}$$

e frequenza

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}$$