PROBLEMA 5.65

Periodo del pendolo ⋆⋆⋆

Determinare la prima correzione al periodo di un pendolo rispetto alla formula valida per piccole oscillazioni.

Soluzione

Dall'espressione dell'energia totale del pendolo

$$E = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell(1-\cos\theta)$$

si trova

$$\frac{\dot{\theta}}{\sqrt{\frac{2}{m\ell^2}\left[E - mg\ell(1-\cos\theta)\right]}} = \pm 1$$

e integrando arriviamo alla formula per il periodo

$$T = 4\int_0^{\theta_{max}} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2E}{m\ell^2}\left[1 - \frac{2mg\ell}{E}\sin^2\frac{\theta}{2}\right]}}$$

dove θ_{max} è il massimo angolo di oscillazione, corrispondente al valore che annulla il denominatore dell'integrando. Introducendo la variabile

$$u = \sqrt{\frac{2mg\ell}{E}}\sin\frac{\theta}{2}$$

abbiamo

$$du = \sqrt{\frac{mg\ell}{2E}}\cos\frac{\theta}{2}d\theta = \sqrt{\frac{mg\ell}{2E}}\sqrt{1 - \frac{E}{2mg\ell}u^2}d\theta$$

da cui

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{E}{2mg\ell}u^2}}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}\,.$$

Sviluppando al primo ordine in $\frac{E}{mg\ell}$ abbiamo

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}}\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}\left(1 + \frac{E}{4mg\ell}u^2\right)\,.$$

Usando gli integrali

$$\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^1 \frac{u^2du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{\pi}{4}$$

otteniamo infine

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left(1+\frac{E}{8mg\ell}\right)$$

Possiamo esprimere questo risultato in funzione dell'ampiezza di oscillazione:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left(1+\frac{1}{16}\theta_{max}^2\right)$$