PROBLEMA 6.15

Cilindro lanciato su un piano ⋆⋆

Un cilindro viene lanciato su un piano con coefficienti di attrito μ_s e μ_d. Il cilindro ha raggio R, e la massa al suo interno è distribuita con una densità dipendente solo dalla distanza dall'asse. Inizialmente il moto è di pura traslazione. Calcolare in funzione del tempo la velocità del centro di massa e quella angolare. Per quale distribuzione di massa la velocità finale è minima?

Soluzione

Inizialmente si ha una forza di attrito $\mu_d Mg$, e le equazioni del moto saranno

$$\begin{aligned} M\dot{v} &= -\mu_d Mg \\ I\dot{\omega} &= \mu_d MgR \end{aligned}$$

per cui la velocità diminuirà linearmente in funzione del tempo e la velocità angolare aumenterà, sempre linearmente. Mettendo le opportune condizioni iniziali abbiamo

$$\begin{aligned} v &= v_0 - \mu_d g t \\ \omega &= \mu_d \frac{MgR}{I} t \,. \end{aligned}$$

Queste relazioni saranno valide fino a quando non si arriverà, a $t = t^\star$, ad una condizione di rotolamento puro, definita da $v = \omega R$, cioè

$$v_0 - \mu_d g t = \mu_d \frac{MgR^2}{I} t$$

da cui si trova

$$t^* = \frac{v_0}{\mu_d g} \frac{1}{1 + \frac{MR^2}{I}} \,.$$

Da questo momento in poi le velocità rimarranno costanti:

$$v = \omega R = \frac{\frac{MR^2}{I}}{1 + \frac{MR^2}{I}} v_0 \,.$$

Per minimizzare la velocità finale dovremo rendere minimo il rapporto MR^2/I. Il valore massimo di I si ottiene se tutta la massa è distribuita sulla superficie laterale, in questo caso $I = MR^2$ e

$$v = \omega R = \frac{1}{2} v_0 \,.$$

Per un cilindro omogeneo $I = MR^2/2$ e

$$v = \omega R = \frac{2}{3} v_0 \,.$$

Infine, se tutta la massa è concentrata sull'asse $I = 0$ e $v = \omega R = v_0$. L'interpretazione di questo caso limite è che in assenza di inerzia angolare il cilindro si mette immediatamente a ruotare senza strisciare, come si può verificare dalla formula per $t^\star$.