PROBLEMA 6.17

Tensore di inerzia di una sfera ⋆⋆

Calcolare il tensore di inerzia di una sfera omogenea di massa M e raggio R, riferito al suo centro di massa.

Soluzione

La disribuzione di massa è invariante per rotazioni, quindi il tensore di inerzia deve essere diagonale e con tutti gli elementi diagonali uguali. Possiamo quindi calcolare il momento di inerzia rispetto ad un asse qualsiasi, ad esempio quello z. Abbiamo quindi

$$I_{zz} = \int dm\,(x^2 + y^2) = \frac{M}{V}\int dV\,(x^2 + y^2)$$

Conviene calcolare l'integrale in coordinate sferiche, per le quali

$$\begin{aligned}
x &= r\sin\theta\cos\phi \\
y &= r\sin\theta\sin\phi \\
dV &= r^2\sin\theta dr d\theta d\phi
\end{aligned}$$

da cui

$$I_{zz} = \frac{M}{V}\int_0^R dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi\, r^4 \sin^2\theta$$

ossia

$$\begin{aligned}
I_{zz} &= \frac{M}{\frac{4\pi}{3}R^3} 2\pi \int_0^R dr \int_{-1}^{1} d\cos\theta\, r^2\left(1 - \cos^2\theta\right) \\
&= \frac{M}{\frac{4\pi}{3}R^3} 2\pi \left(2 - \frac{2}{3}\right)\int_0^R dr\, r^4 \\
&= \frac{M}{\frac{4\pi}{3}R^3}\frac{8\pi}{3}\frac{R^5}{5} = \frac{2}{5}MR^2
\end{aligned}$$

