PROBLEMA 6.19

Cilindro su piano inclinato ⋆⋆

Il cilindro in figura viene lasciato cadere sul piano inclinato in Figura 6.6 con velocità iniziale v_0 e velocità angolare iniziale ω_0. Tra piano e cilindro si ha attrito con coefficienti statici e dinamici μ_s, μ_d. Determinare in quali condizioni dopo un tempo sufficiente il cilindro mantiene un moto di puro rotolamento.

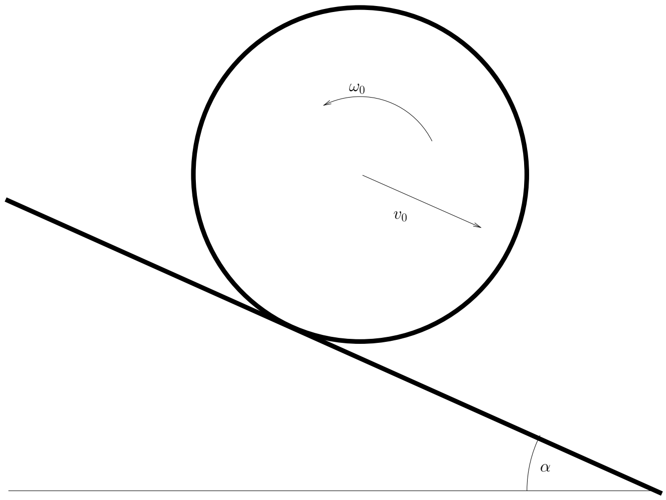

Figura 6.6.: Il cilindro considerato nel problema, con velocità del centro di massa e velocità angolare iniziali arbitrarie.

Soluzione

Scriviamo le equazioni del moto per il cilindro. Per l'accelerazione in direzione parallela al piano abbiamo

$$M\dot{v} = F_a + Mg\sin\alpha$$

e in direzione perpendicolare

$$0 = N - Mg\cos\alpha$$

La seconda equazione cardinale da invece

$$I\dot{\omega} = RF_a$$

Per la forza di attrito si devono distinguere tre casi, a seconda che la velocità del cilindro al punto di contatto sia positiva, negativa o nulla. Questa si scrive anzitutto

$$v_c = v + R\omega$$

e quindi avremo

$$M\dot{v} = -\mu_d N + Mg\sin\alpha \tag{6.19.1}$$
$$I\dot{\omega} = -\mu_d NR \tag{6.19.2}$$

per $v_c > 0$,

$$M\dot{v} = F_s + Mg\sin\alpha \tag{6.19.3}$$
$$I\dot{\omega} = F_s R \tag{6.19.4}$$

per $v_c = 0$ (con $|F_s| < \mu_s N$) e

$$M\dot{v} = \mu_d N + Mg\sin\alpha \tag{6.19.5}$$
$$I\dot{\omega} = \mu_d NR \tag{6.19.6}$$

per $v_c < 0$. In ciascun caso $N = Mg\cos\alpha$. Combinando le equazioni precedenti possiamo scrivere delle equazioni per v_c:

$$\begin{aligned}
\dot{v}_c &= -\mu_d a + g\sin\alpha \quad v_c > 0 \\
\dot{v}_c &= \frac{F_s}{N} a + g\sin\alpha \quad v_c = 0 \\
\dot{v}_c &= \mu_d a + g\sin\alpha \quad v_c < 0
\end{aligned}$$

dove

$$a = N\left(\frac{1}{M} + \frac{R^2}{I}\right) = 3g\cos\alpha \tag{6.19.7}$$

Abbiamo diversi possibili scenari, riassunti in Figura 6.7.

Se $\mu_d > \frac{1}{3}\tan\alpha$ la velocità del punto di contatto diminuisce (linearmente nel tempo) se positiva, e aumenta (sempre linearmente) se negativa. Questo significa che in un tempo finito avremo $v_c = 0$, indipendentemente dalle condizioni iniziali. Per consistenza dovrà essere $\dot{v}_c = 0$, cioè

$$|F_s| = \frac{N}{3}\tan\alpha < \mu_s N$$

che è assicurato dato che $\mu_s > \mu_d$.

Se $\mu_d = \frac{1}{3}\tan\alpha$ una velocità del punto di contatto inizialmente positiva rimane costante, quindi non si arriva a rotolamento puro se $v_0 + \omega_0 R > 0$. Invece se la velocità del punto di contatto è inizialmente negativa, cresce linearmente e si arriva a rotolamento puro in un tempo finito.

Infine se $\mu_d < \frac{1}{3}\tan\alpha$ la velocità del punto di contatto cresce comunque linearmente nel tempo. Quindi se $v_0 + \omega_0 R > 0$ non si arriverà mai a rotolamento puro. Se $v_0 + \omega_0 R \le 0$ invece si arriverà in un tempo finito ad esso, e la condizione perchè questo continui si scrive ancora

$$\mu_s > \frac{1}{3}\tan\alpha$$

ma non è automaticamente assicurata da $\mu_s > \mu_d$. Se $\mu_s < \frac{1}{3}\tan\alpha$ la velocità del punto di contatto continuerà ad aumentare.

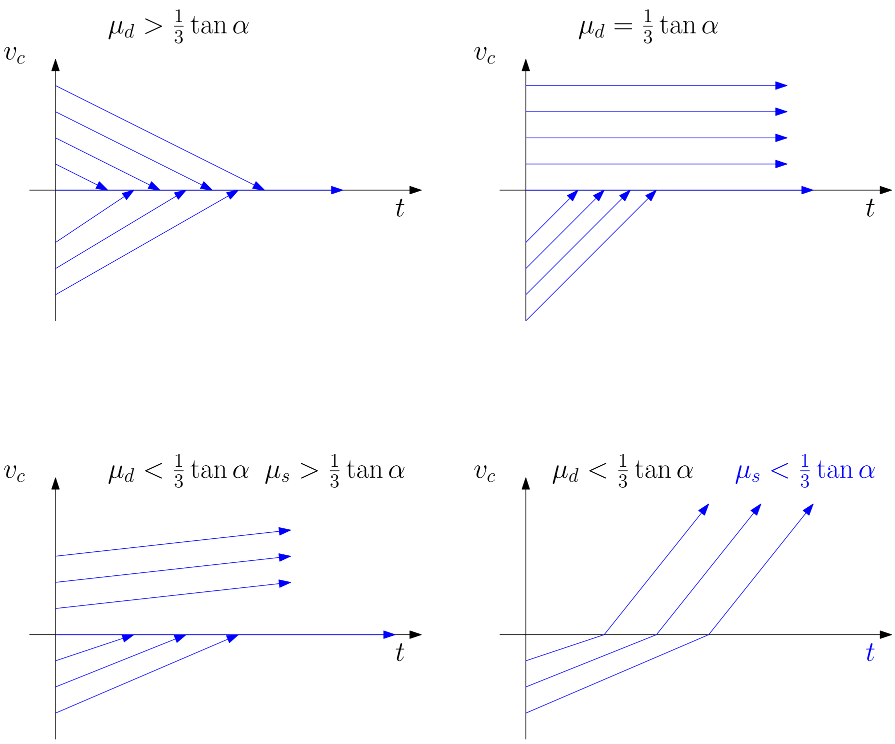

Figura 6.7.: Evoluzione della velocità del punto di contatto tra cilindro e piano, per diversi possibili valori di μ_d, e delle condizioni iniziali.