PROBLEMA 6.20

## Sistema di carrucole e corpi rigidi ★★

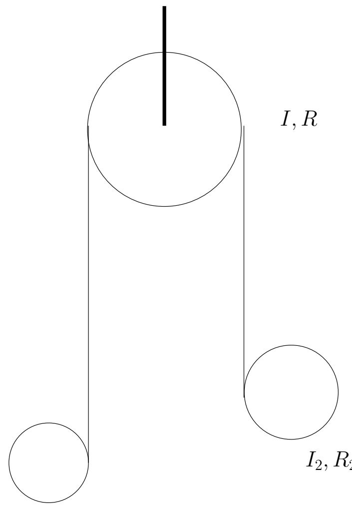


Figura 6.8.: Il sistema di carrucole e corpi rigidi considerato nell'esercizio.

Nel sistema in Figura 6.8 il filo inestensibile e privo di massa è avvolto ai due cilindri appesi e resta aderente alla carrucola. Scrivere le equazioni che determinano le accelerazioni angolari e lineari dei tre corpi rigidi, e la tensione del filo. I momenti di inerzia sono dati rispetto ad un asse passante per il centro di massa dei cilindri. Cosa succede alla tensione se $I \to 0$?

### Soluzione

Scriviamo l'equazione del moto per la carrucola, indicando con $T_1$ e $T_2$ le tensioni del filo dal lato della massa $M_1$ e di quella $M_2$

$$I\ddot{\theta} = R\left(T_1 - T_2\right) \tag{6.20.1}$$

Analogamente per la massa a destra

$$\begin{aligned} I_1\ddot{\theta}_1 &= R_1 T_1 \\ M_1\ddot{y}_1 &= T_1 - M_1 g \end{aligned}$$

e per quella a sinistra

$$\begin{aligned} I_2\ddot{\theta}_2 &= -R_2 T_2 \\ M_2\ddot{y}_2 &= T_2 - M_2 g \end{aligned}$$

dove $y_1$ e $y_2$ sono le posizioni verticali dei loro centri di massa. Dato che il filo è inestensibile, e resta aderente alla carrucola, deve essere

$$\begin{aligned}\ddot{y}_1 &= -R\ddot{\theta} - R_1\ddot{\theta}_1\\ \ddot{y}_2 &= R\ddot{\theta} + R_2\ddot{\theta}_2\end{aligned}$$

ed abbiamo un numero sufficiente di equazioni per ricavare le quantità incognite. Ponendo $I_1 = m_1R_1^2/2$ e $I_2 = m_2R_2^2/2$ troviamo

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} &= \frac{gR\,(M_1 - M_2)}{3I + (M_1 + M_2)\,R^2}\\ \ddot{\theta}_1 &= \frac{2g\left(3I + 2M_2R^2\right)}{3\left[3I + (M_1 + M_2)\,R^2\right]R_1}\\ \ddot{\theta}_2 &= -\frac{2g\left(3I + 2M_1R^2\right)}{3\left[3I + (M_1 + M_2)\,R^2\right]R_2}\\ \ddot{y}_1 &= \frac{g\left[6I + (3M_1 + M_2)\,R^2\right]}{3\left[3I + (M_1 + M_2)\,R^2\right]}\\ \ddot{y}_2 &= -\frac{g\left[6I + (M_1 + 3M_2)\,R^2\right]}{3\left[3I + (M_1 + M_2)\,R^2\right]}\\ T_1 &= \frac{gM_1\left(3I + 2M_2R^2\right)}{3\left[3I + (M_1 + M_2)\,R^2\right]}\\ T_2 &= \frac{gM_2\left(3I + 2M_1R^2\right)}{3\left[3I + (M_1 + M_2)\,R^2\right]}\end{aligned}$$

Nel caso $I \to 0$ si trova

$$T_1 = T_2 = \frac{2gM_1M_2}{3\,(M_1 + M_2)}$$

L'uguaglianza tra le due tensioni era evidente già considerando l'equazione (6.20.1).