PROBLEMA 6.21

Sistema di carrucole ⋆⋆

Scrivere le equazioni che determinano accelerazioni e tensioni dei fili per il sistema in Figura 6.9, sapendo che il filo inestensibile e privo di massa non slitta sui cilindri.

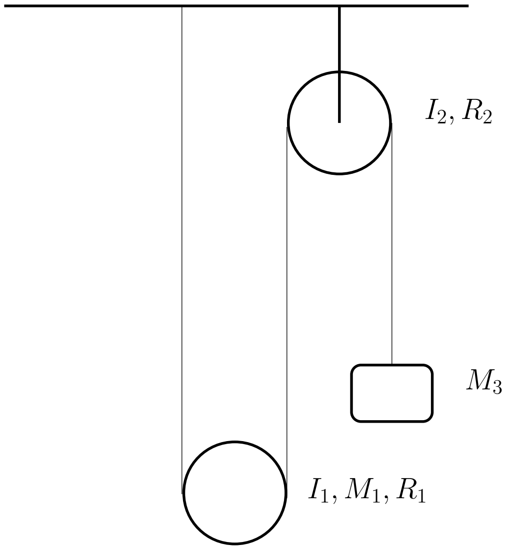

Figura 6.9.: Il sistema di carrucole considerato nell'esercizio.

Soluzione

Usando le convenzioni in Figura 6.10 scriviamo le equazioni del moto per il primo cilindro

$$\begin{aligned} M_1\ddot{y}_1 &= T_1 + T_2 - M_1 g \\ I_1\ddot{\theta}_1 &= R_1 (T_2 - T_1) \end{aligned}$$

per la carrucola

$$I_2\ddot{\theta}_2 = R_2 (T_2 - T_3)$$

e per la massa sospesa

$$M_3\ddot{y}_3 = T_3 - M_3 g$$

Dato che il filo rimane aderente ai cilindri, ed è inestensibile, abbiamo inoltre le condizioni che seguono:

1. Il punto A del cilindro rimane istantaneamente fermo,

$$\dot{y}_1 - R_1\dot{\theta}_1 = 0$$

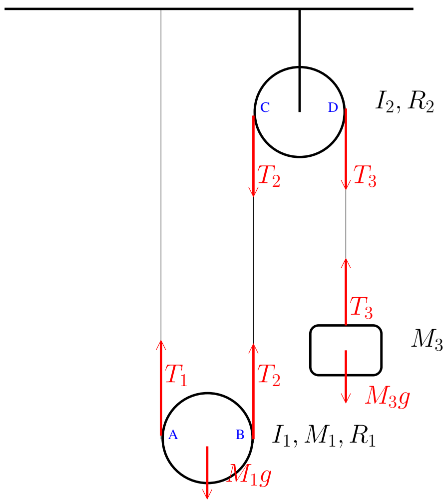

Figura 6.10.: Forze applicate al sistema per il problema 6.21.

2. Il punto B del cilindro ha la stessa velocità del punto C della carrucola

$$\dot{y}_1 + R_1 \dot{\theta}_1 = -R_2 \dot{\theta}_2$$

3. Il punto D della carrucola ha la stessa velocità della massa sospesa

$$R_2 \dot{\theta}_2 = \dot{y}_3$$

Derivando queste condizioni rispetto al tempo otteniamo dei vincoli tra le accelerazioni. Abbiamo quindi un numero sufficiente di equazioni per determinare $\ddot{y}_1$, $\ddot{y}_3$, $\ddot{\theta}_1$, $\ddot{\theta}_2$, T_1, T_2, T_3.