PROBLEMA 6.25

Tensore di inerzia corpo composto ★★

All'interno di una sfera di raggio R si trova una cavità pure sferica di raggio $R/2$ centrata in un punto a distanza $d \leq R/2$ dal centro della prima. Calcolare il tensore di inerzia del corpo rispetto al centro di massa, se la sua massa totale è M.

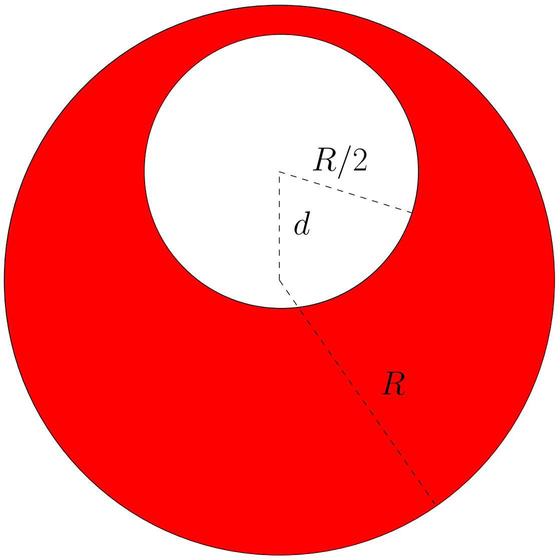

Figura 6.14.: La sfera cava considerata nell'esercizio.

Soluzione

Calcoliamo prima di tutto il tensore di inerzia di una sfera piena di massa M e raggio R rispetto al suo centro di massa. Data la simmetria, il tensore sarà proporzionale alla matrice identica, cioè $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$. Inoltre

$$I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = \int (y^2 + z^2) dm + \int (x^2 + z^2) dm + \int (x^2 + y^2) dm$$

da cui

$$3I_{xx} = 2 \int \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dm$$

Abbiamo quindi

$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{3} \rho \int r^2 dV$$

e dato che

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

e

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

otteniamo

$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{3}\frac{M}{\frac{4\pi}{3}R^3}\int_0^R 4\pi r^4 dr = \frac{2}{5}MR^2$$

Calcoliamo adesso la posizione del centro di massa del corpo. Se mancasse la cavità, esso sarebbe al centro della sfera grande, dove fissiamo l'origine del sistema di coordinate. Chiaramente dovrà essere

$$\vec{0} = \frac{\frac{1}{7}M\vec{d} + M\vec{r}}{\frac{8}{7}M}$$

dove $\vec{d}$ è la posizione del centro della cavità rispetto all'origine, $M/7$ la massa della sfera che la occuperebbe la cavità, $\vec{r}$ la posizione del centro di massa del corpo. Otteniamo quindi

$$\vec{r} = -\frac{1}{7}\vec{d}$$

Costruiamo adesso il tensore di inerzia, sottraendo da quello di una sfera piena quello di una sfera che occuperebbe la cavità. Scegliendo le coordinate in modo da avere $\vec{d} = (0, 0, d)$ otteniamo

$$\begin{aligned} I = {} & \frac{2}{5}\left(\frac{8}{7}M\right)R^2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{8}{7}M\begin{pmatrix} (d/7)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (d/7)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & - \frac{2}{5}\left(\frac{1}{7}M\right)\left(\frac{R}{2}\right)^2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{7}M\begin{pmatrix} (8d/7)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (8d/7)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dove abbiamo applicato il teorema di Steiner (vedere l'esercizio 6.5) per riferire ogni tensore al centro di massa del corpo. Il risultato finale è

$$I = \frac{31}{70}MR^2\begin{pmatrix} 1 - \frac{80}{217}\left(\frac{d}{R}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{80}{217}\left(\frac{d}{R}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$