PROBLEMA 6.2

Tensore di inerzia di un cubo II ★★

Determinare il tensore di inerzia di un cubo omogeneo di lato a e massa M. Porre l'origine del sistema di coordinate nel centro di massa.

Soluzione

A causa della simmetria del corpo il tensore di inerzia è diagonale, con elementi diagonali uguali. Possiamo allora calcolare

$$I^{xx} = \int (x^2 + y^2) dm$$

dove l'integrazione è estesa a tutto il corpo. In coordinate cartesiane abbiamo

$$dm = \rho dV = \frac{M}{a^3} dxdydz$$

e quindi l'integrale diviene

$$I^{xx} = \frac{M}{a^3} \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-a/2}^{a/2} dy \int_{-a/2}^{a/2} dz \, (x^2 + y^2) \, .$$

Integriamo su z

$$I^{xx} = \frac{M}{a^3} a \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-a/2}^{a/2} dy \, (x^2 + y^2)$$

quindi su y

$$I^{xx} = \frac{M}{a^3} a \int_{-a/2}^{a/2} dx \, (ax^2 + 2\frac{1}{3}\frac{1}{8}a^3)$$

ed infine su x, ottenendo

$$I^{xx} = I^{yy} = I^{zz} = \frac{1}{6} M a^2 \, .$$