PROBLEMA 6.30

Piccole oscillazioni metà cilindro, niente attrito ⋆⋆

La metà di un cilindro omogeneo di raggio R, massa M e altezza h è appoggiato su un piano orizzontale privo di attrito. Calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio.

Soluzione

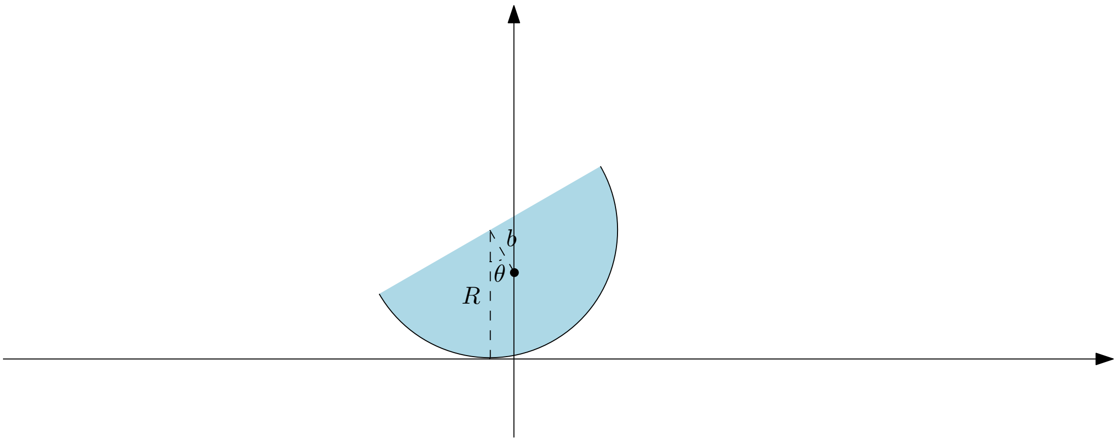

Figura 6.23.: Il semicilindro durante l'oscillazione, in un sistema di riferimento nel quale la componente orizzontale della velocità del centro di massa è nulla. Il sistema è stato scelto in modo che il centro di massa (indicato dal punto scuro) si trovi sull'asse delle ordinate.

La componente orizzontale della quantità di moto del sistema si conserva, dato che non esistono forze esterne orizzontali applicate al sistema. Possiamo allora scegliere un sistema di riferimento inerziale nel quale il centro di massa si trova in ogni istante sull'asse y, come in Figura 6.23.

Scriviamo l'energia potenziale. Detto θ l'angolo tra la verticale e il segmento che congiunge il centro della semicirconferenza al centro di massa possiamo scrivere la posizione verticale di quest'ultimo

$$y_{cm} = R - b\cos\theta$$

Allora

$$U(\theta) = Mg\left(R - b\cos\theta\right)$$

che ha un minimo per $\theta = 0$, che è quindi una posizione di equilibrio stabile.

Scriviamo l'energia cinetica nella forma

$$E_c = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$$

dove $v_{cm}^2 = \dot{y}_{cm}^2$ è il quadrato della velocità del centro di massa (che si muove solo verticalmente nel sistema scelto) e $\omega^2 = \dot{\theta}^2$ è il quadrato della velocità angolare. Il momento di inerzia I_{cm} è calcolato rispetto al centro di massa del sistema, e può essere calcolato usando il teorema di Steiner:

$$\frac{1}{2} I_{cyl} = I_{cm} + Mb^2$$

dove

$$I_{cyl} = \frac{1}{2} (2M) R^2$$

è il momento di inerzia di un cilindro completo rispetto al suo asse. In conclusione

$$I_{cm} = \frac{1}{2} M \left(R^2 - 2b^2 \right)$$

Derivando y_{cm} rispetto al tempo troviamo

$$\dot{y}_{cm} = b\dot{\theta} \sin\theta$$

e sostituendo otteniamo l'energia finale

$$E = \frac{1}{2} \left(Mb^2 \sin^2\theta + I_{cm} \right) \dot{\theta}^2 + Mg \left(R - b\cos\theta \right)$$

Per piccole oscillazioni attorno $\theta = 0$ possiamo approssimare questa espressione al secondo ordine in θ, ottenendo

$$E = \frac{1}{2} I_{cm} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} Mgb\theta^2$$

che corrisponde ad un oscillatore armonico di frequenza

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Mgb}{I_{cm}}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2gb}{R^2 - 2b^2}}$$