PROBLEMA 6.33

Campo di velocità di una moneta ⋆⋆⋆

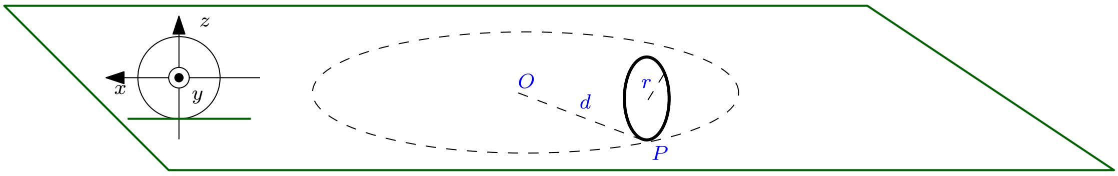

Figura 6.26.: Il moto della monetina sul piano. La velocità $\vec{v}_0$ specificata nel problema è quella del punto geometrico P di contatto tra monetina e piano.

Si vuole studiare il campo di velocità di una monetina molto sottile di raggio r che si muove facendo rotolamento puro su un piano. Il punto di contatto P tra la monetina e il piano si muove su una circonferenza di raggio d attorno ad un centro O (vedere Figura) con velocità costante in modulo v_0. La monetina rimane tangente alla circonferenza. Si vuole determinare in particolare

- L'asse istantaneo di rotazione
- Il campo di velocità $\vec{v}(x,z)$ della monetina nel sistema di riferimento rappresentato sulla sinistra in Figura (6.26)
- Il vettore velocità angolare

Soluzione

Il metodo più veloce per determinare l'asse istantaneo di rotazione è quello di trovare due punti istantaneamente fermi del corpo rigido considerato. Notiamo che tali punti potranno essere esterni alla monetina, ma collegati "rigidamente" ad essa. Nel caso considerato il punto F_1 della monetina (Figura 6.27) che è ad un certo istante a contatto col piano orizzontale è sicuramente fermo, data la condizione di rotolamento puro.

Consideriamo adesso, sempre in Figura 6.27, il punto F_2 posto ad una altezza r sulla verticale di O: la sua distanza da un punto qualsiasi della monetina si mantiene costante durante il moto, e quindi possiamo pensarlo collegato ad essa rigidamente. Si tratta quindi di un secondo punto fisso, e l'asse di rotazione istantaneo è la retta passante tra F_1 e F_2. Notare che il punto O non rimane ad una distanza fissa dai punti della monetina: ad esempio la distanza tra O ed un punto A posto sul bordo varia da un minimo di $\overline{OA} = d$ (quando $A \equiv P$) ad un massimo di $\overline{OA} = \sqrt{d^2 + 4r^2}$ (quando A si trova sulla verticale del punto di contatto col piano).

Il vettore velocità angolare avrà una direzione parallela all'asse istantaneo di rotazione. Per determinarne il modulo osserviamo che la velocità del centro della monetina C è, all'istante rappresentato in Figura 6.27, $\vec{v} = -v_0\hat{x}$. Dato che il moto è di puro rotolamento dovrà anche essere

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r} \tag{6.33.1}$$

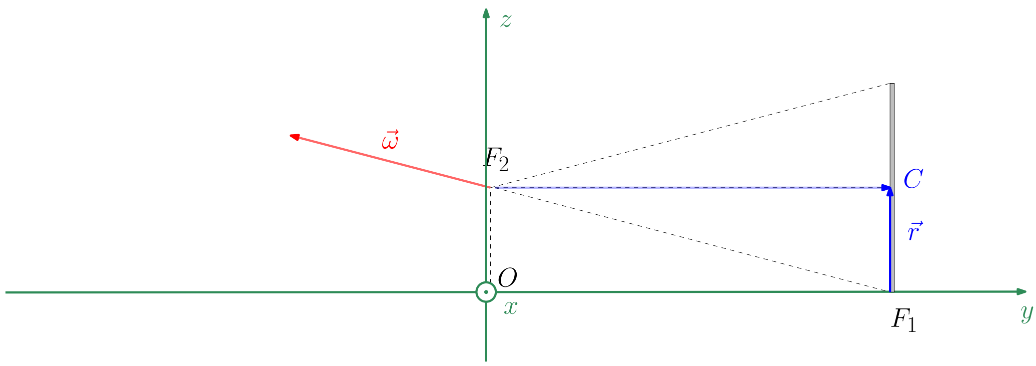

Figura 6.27.: Una costruzione che permette di determinare l'asse istantaneo di rotazione della monetina, vista in sezione trasversa ad un dato istante. Dato che sia F_1 che F_2 sono istantaneamente fermi, l'asse istantaneo di rotazione passa da essi.

dove $\vec{r}$ è un qualsiasi vettore che collega un punto istantaneamente fermo con C, ad esempio il due vettori $\overrightarrow{F_1C}$ e $\overrightarrow{F_2C}$ rappresentati in blu. Avremo quindi

$$-v_0\hat{x} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{F_1C} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 0 & 0 & r \end{vmatrix} = r\omega_y\hat{x} - r\omega_x\hat{y}$$

da cui segue $\omega_y = -v_0/r$, $\omega_x = 0$. Oppure

$$-v_0\hat{x} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{F_2C} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix} = d\omega_x\hat{z} - d\omega_z\hat{x}$$

da cui otteniamo $\omega_z = v_0/d$. In conclusione scegliendo il riferimento come in 6.27 abbiamo

$$\vec{\omega} = \left(0, -\frac{v_0}{r}, \frac{v_0}{d}\right)$$

Determiniamo adesso il campo di velocità sulla monetina. Possiamo usare direttamente l'espressione (6.33.1). Nel sistema di riferimento a sinistra in Figura (6.26) abbiamo

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ -v_0/r \\ v_0/d \end{pmatrix}; \qquad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z+r \end{pmatrix}; \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

da cui

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & -v_0/r & v_0/d \\ x & 0 & z+r \end{vmatrix} = -v_0 \frac{z+r}{r}\hat{x} + v_0 \frac{x}{d}\hat{y} + v_0 \frac{x}{r}\hat{z}$$

Si verifica che il punto di contatto $(0, 0, -r)$ è istantaneamente fermo. Inoltre i punti che non si trovano sull'asse z hanno una componente non nulla della velocità lungo $\hat{y}$, come ci si poteva attendere dato che la monetina deve curvare per rimanere sulla propria traiettoria circolare. Il limite $d \to \infty$ corrisponde in effetti al caso di traiettoria rettilinea, per il quale

$$\vec{v} = -v_0 \frac{z+r}{r}\hat{x} + v_0 \frac{x}{r}\hat{z}$$

e

$$\vec{\omega} = -\frac{v_0}{r}\hat{y}$$