PROBLEMA 6.42

Un altro giro della morte ⋆⋆

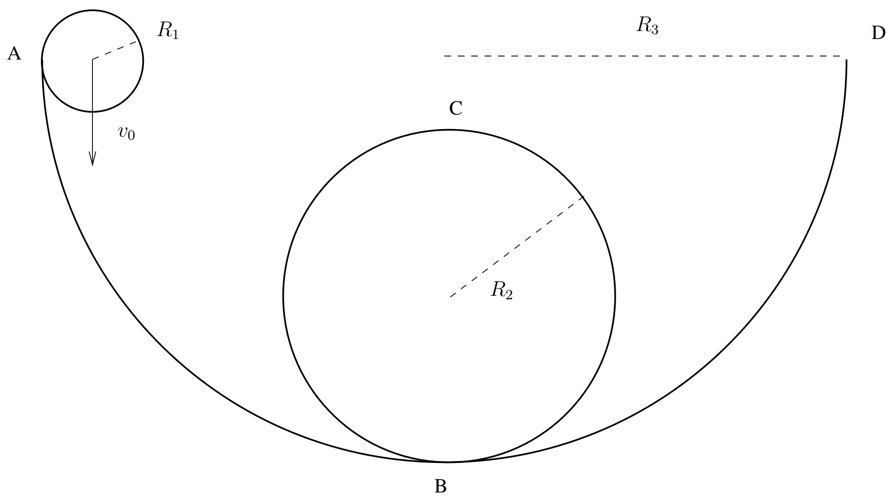

Figura 6.40.: La guida considerata nell'esercizio.

La guida in Figura 6.40 è formata da settori di circonferenza, di raggio R_2 e $R_3 > R_2$, che sono collegati nella sequenza $A - B$, $B - C$, $C - B$ e $B - D$. Un disco di raggio $R_1 < R_2$ e massa m rotola senza strisciare sulla guida, partendo dal punto A con velocità del centro di massa $v_{cm} = v_0$.

1. Calcolare in modulo, direzione e verso la reazione vincolare della guida immediatamente prima e immediatamente dopo il primo passaggio per il punto B e dire se essa è impulsiva al momento del passaggio.
2. Ponendo $v_0 = 0$ determinare il massimo valore di R_2 per il quale la guida viene percorsa completamente, considerando il vincolo monolatero.
3. Calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno al punto B.

Soluzione[13]

Domanda 1

Dato che l'energia totale si conserva

$$E = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + mgz \tag{6.42.1}$$

[13] Primo problema scritto 11/9/2008

e che velocità del centro di massa e velocità angolare del disco sono legate da $v_{cm} = -R_1\omega$ segue che

$$E = \frac{1}{2}\left(m + \frac{I_{cm}}{R_1^2}\right) v_{cm}^2 + mgz = \frac{3}{4} m v_{cm}^2 + mgz \tag{6.42.2}$$

Questo significa che la velocità del centro di massa dipende solo dalla sua posizione z. Quindi immediatamente prima e immediatamente dopo B v_{cm} non sarà cambiata (nemmeno in direzione, dato che sarà sempre orizzontale) e quindi non è presente nessuna forza impulsiva.

Il centro di massa percorre una traiettoria circolare, per cui immediatamente prima di B sarà

$$m\frac{v_{cm}^2}{R_3 - R_1} = N - mg \tag{6.42.3}$$

e immediatamente dopo

$$m\frac{v_{cm}^2}{R_2 - R_1} = N - mg \tag{6.42.4}$$

da cui si deduce che la reazione normale della guida è diversa.

Si può osservare che in B l'accelerazione tangenziale del centro di massa è nulla: questo si ricava direttamente scrivendo l'energia nella forma

$$E = \frac{3}{4} m \left(R_3 - R_1\right)^2 \dot{\theta}^2 + mg\left(R_3 - R_1\right)\left(1 - \cos\theta\right) \tag{6.42.5}$$

valida prima di B e derivando rispetto al tempo

$$\dot{E} = \frac{3}{2} m \left(R_3 - R_1\right)^2 \dot{\theta}\ddot{\theta} + mg\left(R_3 - R_1\right)\dot{\theta}\sin\theta = 0 \tag{6.42.6}$$

si ottengono le equazioni del moto

$$\frac{3}{2} m \left(R_3 - R_1\right)^2 \ddot{\theta} + mg\left(R_3 - R_1\right)\sin\theta = 0 \tag{6.42.7}$$

che permettono di concludere $\ddot{\theta} = 0$ in $\theta = 0$. Analogamente si può derivare l'equazione del moto valida dopo B

$$\frac{3}{2} m \left(R_2 - R_1\right)^2 \ddot{\theta} + mg\left(R_2 - R_1\right)\sin\theta = 0 \tag{6.42.8}$$

in entrambi i casi si è utilizzata come coordinata l'angolo tra la direzione verticale e la normale alla guida.

Dato che non c'è accelerazione tangenziale, non si avranno forze orizzontali, e la reazione ha la sola componente normale discontinua calcolata precedentemente.

Domanda 2

La velocità nel punto C si calcola dalla conservazione dell'energia:

$$mgR_3 = \frac{3}{4}mv_{cm}^2 + mg\left(2R_2 - R_1\right) \tag{6.42.9}$$

da cui

$$v_{cm}^2 = \frac{4}{3}g\left(R_1 + R_3 - 2R_2\right) \tag{6.42.10}$$

ma per poter passare deve essere

$$m\frac{v_{cm}^2}{\left(R_2 - R_1\right)} \geq mg \tag{6.42.11}$$

da cui

$$\frac{4}{3}\left(R_1 + R_3 - 2R_2\right) \geq \left(R_2 - R_1\right) \tag{6.42.12}$$

e quindi

$$R_2 \leq \frac{7R_1 + 4R_3}{11} \tag{6.42.13}$$

Domanda 3

Il periodo è la somma di un semiperiodo a sinistra di B più un semiperiodo a destra. Il primo è determinato dalla equazione del moto scritta in precedenza, sviluppata per piccole oscillazioni:

$$\frac{3}{2}m\left(R_3 - R_1\right)^2\ddot{\theta} + mg\left(R_3 - R_1\right)\theta = 0 \tag{6.42.14}$$

da cui

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{3\left(R_3 - R_1\right)}{2g}} \tag{6.42.15}$$

e analogamente la seconda

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{3\left(R_2 - R_1\right)}{2g}} \tag{6.42.16}$$

quindi

$$T = \frac{T_1 + T_2}{2} = \pi\sqrt{\frac{3}{2g}}\left(\sqrt{R_3 - R_1} + \sqrt{R_2 - R_1}\right) \tag{6.42.17}$$