PROBLEMA 6.43

Sbarra in guida circolare, vincolo bilatero ⋆⋆

Una sbarra omogenea di lunghezza ℓ e massa m ha i due estremi vincolati (vincolo bilatero) ad una guida circolare di raggio $r > \ell/2$ come in Figura 6.41. La guida è montata verticalmente, in presenza di gravità. Non esiste nessun tipo di attrito.

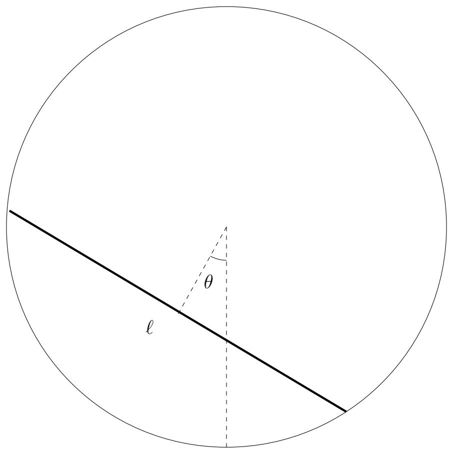

Figura 6.41.: La sbarra con gli estremi vincolati alla guida circolare.

1. Se inizialmente $\theta = 0$ determinare il minimo valore di $\dot{\theta}(0)$ che permette alla sbarra di percorrere un giro completo sulla guida.
2. Scrivere le equazioni del moto del sistema. Esistono quantità conservate?
3. Calcolare il periodo delle piccole oscillazioni del sistema attorno alla posizione di equilibrio stabile.

Soluzione[14]

Domanda 1

Possiamo scrivere l'energia del sistema nella forma

$$E = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 - Mgd\cos\theta$$

In questa espressione d è la distanza tra il punto medio della sbarra (il suo centro di massa) e il centro della guida, che vale

$$d = \sqrt{r^2 - \frac{\ell^2}{4}}$$

[14]Primo esercizio scritto 11/1/2007

I è il momento di inerzia della sbarra rispetto all'asse di rotazione, che passa per il centro della guida. I si calcola applicando il teorema di Steiner:

$$I = \frac{1}{12}M\ell^2 + Md^2$$

Per percorrere un giro completo dovrà essere cioè

$$\dot{\theta}(0) > \sqrt{\frac{4Mgd}{I}}$$

Domanda 2

Si conserva l'energia totale, dato che le reazioni vincolari non fanno lavoro sul sistema. Le equazioni del moto si possono ottenere rapidamente derivando E rispetto al tempo

$$\dot{E} = I\ddot{\theta}\dot{\theta} + Mgd\dot{\theta}\sin\theta = 0$$

da cui

$$I\ddot{\theta} + Mgd\sin\theta = 0$$

Domanda 3

Possiamo utilizzare l'equazione del moto determinata precedentemente. La posizione di equilibrio stabile è chiaramente $\theta = 0$, che è un minimo dell'energia potenziale gravitazionale. Considerando piccole oscillazioni possiamo porre $\sin\theta \simeq \theta$ e quindi

$$I\ddot{\theta} + Mgd\theta = 0$$

Questa è l'equazione del moto di un oscillatore armonico di periodo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}}$$