PROBLEMA 6.45

Oscillatore con carrucole e corpi rigidi ⋆⋆

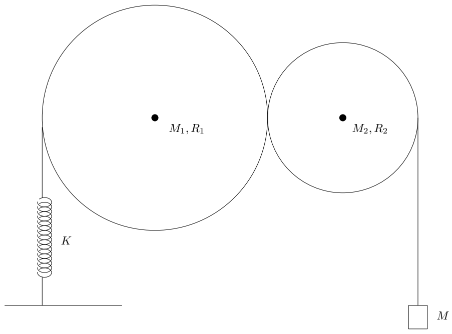

Figura 6.44.: L'oscillatore descritto nell'esercizio.

I due dischi in Figura 6.44, di massa M_1, M_2 e raggio R_1, R_2 sono vincolati a ruotare intorno ai loro centri e lo fanno senza strisciare uno sull'altro. Una massa M è appesa a un filo inestensibile avvolto al disco di destra, il sinistro è collegato mediante una molla di costante elastica e lunghezza a riposo nulla ad un punto fisso.

1. Il sistema è inizialmente in quiete, e l'allungamento della molla è nullo. Viene lasciato libero di muoversi: calcolare di quanto si abbassa al massimo la massa M.

2. Mostrare che il sistema è equivalente ad un oscillatore armonico, e determinarne la frequenza.

3. Se sulla massa M agisce una forza di attrito viscoso $F = -\lambda v$, dove λ è una costante positiva dalle opportune dimensioni, valutare il fattore di qualità dell'oscillatore.

Soluzioni[16]

Domanda 1 L'energia del sistema si conserva, e vale

$$E = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} M \dot{y}^2 + Mgy + \frac{K}{2} \delta^2$$

dove ω_1, ω_2 sono le velocità angolari dei due cilindri ed y l'altezza della massa misurata rispetto alla posizione iniziale. La deformazione della molla δ è data da $\delta = y$ a causa della condizione di rotolamento puro. Uguagliando l'energia iniziale a quella nella posizione di massimo allungamento abbiamo

$$Mgy + \frac{K}{2} y^2 = 0$$

[16]Primo esercizio compitino 13 aprile 2011

da cui otteniamo il massimo abbassamento

$$y = -\frac{2Mg}{K}$$

Domanda 2 Le condizioni di rotolamento puro sono

$$\begin{aligned} \omega_1 R_1 &= -\omega_2 R_2 \\ \omega_2 R_2 &= y \end{aligned}$$

da cui segue che l'energia può essere scritta nella forma (usando $I_1 = M_1 R_1^2/2$ e $I_2 = M_2 R_2^2/2$)

$$E = \frac{1}{2}\left(M + \frac{1}{2}M_1 + \frac{1}{2}M_2\right)\dot{y}^2 + Mgy + \frac{K}{2}y^2$$

Derivando rispetto al tempo

$$\dot{E} = \left(M + \frac{1}{2}M_1 + \frac{1}{2}M_2\right)\dot{y}\ddot{y} + Mg\dot{y} + Ky\dot{y} = 0$$

troviamo le equazioni del moto

$$\left(M + \frac{1}{2}M_1 + \frac{1}{2}M_2\right)\ddot{y} + Ky = -Mg$$

che sono quelle di un oscillatore armonico sottoposto ad una forza costante. La frequenza sarà dunque

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2K}{2M + M_1 + M_2}}$$

Non volendo utilizzare l'energia, possiamo scrivere direttamente le equazioni del moto. Per la massa sospesa abbiamo

$$M\ddot{y} = -Mg + T$$

dove T è la tensione del filo. La seconda equazione cardinale per il primo cilindro si scrive

$$I_1\ddot{\theta}_1 = -KR_1^2\theta_1 + FR_1$$

dove F è la forza applicata al punto di contatto e θ_1 è lo spostamento angolare dalla posizione iniziale. Per il secondo abbiamo

$$I_2\ddot{\theta}_2 = FR_2 - TR_2$$

dove θ_2 è lo spostamento angolare dalla posizione iniziale. La condizione di puro rotolamento si scrive

$$R_1\dot{\theta}_1 = -R_2\dot{\theta}_2$$

ossia

$$R_1\theta_1 = -R_2\theta_2$$

Inoltre

$$y = R_2\theta_2$$

Esprimendo tutte le equazioni in funzione di y abbiamo

$$\begin{aligned} M\ddot{y} &= -Mg + T \\ I_1\ddot{y} &= -KR_1^2 y - FR_1^2 \\ I_2\ddot{y} &= FR_2^2 - TR_2^2 \end{aligned}$$

da cui

$$\left(M + \frac{I_1}{R_1^2} + \frac{I_2}{R_2^2}\right)\ddot{y} = -Mg - Ky$$

ossia

$$\left(M + \frac{1}{2}M_1 + \frac{1}{2}M_2\right)\ddot{y} + Ky = -Mg$$

Domanda 3 In presenza di attrito viscoso l'equazione del moto diventa

$$\left(M + \frac{1}{2}M_1 + \frac{1}{2}M_2\right)\ddot{y} + \lambda\dot{y} + Ky = -Mg$$

Il fattore di qualità è dato dal prodotto

$$Q = \omega\tau$$

dove τ è il tempo di smorzamento,

$$\tau = \frac{2\left(M + \frac{1}{2}M_1 + \frac{1}{2}M_2\right)}{\lambda}$$

Quindi

$$Q = \frac{2\left(M + \frac{1}{2}M_1 + \frac{1}{2}M_2\right)}{\lambda}\sqrt{\frac{K}{M + \frac{1}{2}M_1 + \frac{1}{2}M_2}} = \frac{1}{\lambda}\sqrt{2K\left(2M + M_1 + M_2\right)}$$