PROBLEMA 6.48

Pendolo fisico con contrappeso ⋆⋆

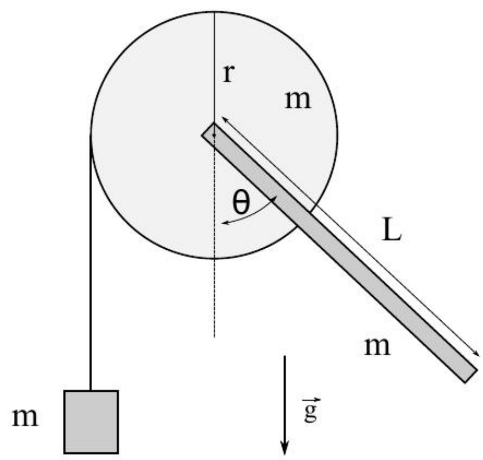

Figura 6.46.: Il sistema considerato nell'esercizio.

Un'asta omogenea di lunghezza L, massa m e spessore trascurabile è rigidamente connessa ad un disco di raggio r e massa m, come in Figura 6.46. Il disco è vincolato a ruotare attorno ad un perno fisso passante per il suo centro. Uno degli estremi dell'asta coincide con il centro del disco. Attorno al disco è avvolto un filo inestensibile di massa trascurabile, che scorre sul bordo senza strisciare. All'estremità inferiore del filo è sospeso un corpo puntiforme di massa m. Tutti e tre i corpi hanno la stessa massa. Il tutto è immerso in un campo gravitazionale uniforme di intensità g diretto verso il basso.

1. Assumendo che la sbarra sia inizialmente ferma formando un angolo θ_0 noto con la verticale, determinare quali condizioni devono soddisfare i parametri del sistema (m, L e r) affinchè la massa sospesa al filo acceleri verso il basso.

2. Trovare eventuali posizioni di equilibrio stabile del sistema, determinando che condizioni devono essere soddisfatte dai parametri affinchè esistano.

3. Nell'ipotesi che una posizione di equilibrio stabile esista, determinare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno a questa.

Soluzione[17]

Domanda 1

Il disco ruota soggetto ai momenti di due forze, calcolati rispetto al centro del disco: la forza peso dell'asta e la tensione della fune:

$$I\dot{\omega} = -\frac{L}{2}mg\sin\theta + rT \tag{6.48.1}$$

dove I è il momento di inerzia del sistema calcolato rispetto al perno del disco. Per ora non serve calcolarlo. Abbiamo preso come verso positivo per ω quello che determina una rotazione in senso anti-orario. Il moto del corpo appeso al filo è determinato dall'equazione

$$m\ddot{z} = -mg + T \tag{6.48.2}$$

dove z è crescente verso l'alto. Il fatto che la fune non strisci sul disco dà il vincolo:

$$\ddot{z} = -r\dot{\omega} \tag{6.48.3}$$

Sostituendo nell'Equazione (6.48.1) e ricavando T dalla (6.48.2) si ottiene

$$\ddot{z} = mg\frac{\frac{L}{2}\sin\theta - r}{\frac{I}{r} + mr} \tag{6.48.4}$$

Il corpo accelera verso il basso se $\ddot{z} < 0$, ovvero se

$$L < \frac{2r}{\sin\theta} \tag{6.48.5}$$

Domanda 2

Per trovare le posizioni di equilibrio si scrive l'energia potenziale del sistema e si cercano i minimi. L'energia potenziale ha solamente contributi gravitazionali:

$$U = mgz - mg\frac{L}{2}\cos\theta = -mgr\theta - mg\frac{L}{2}\cos\theta = -mg\left(r\theta + \frac{L}{2}\cos\theta\right) \tag{6.48.6}$$

dove si è usata la relazione di rotolamento della corda ($r\dot{\theta} = -\dot{z}$) e si è omessa una costante irrilevante. Otteniamo la derivata

$$\frac{dU}{d\theta} = mg\left(-r + \frac{L}{2}\sin\theta\right) \tag{6.48.7}$$

che si annulla quando

$$\sin\theta = \frac{2r}{L} \tag{6.48.8}$$

[17] Primo problema compitino 18 aprile 2011

Esiste soluzione solamente se $2r/L < 1$ ovvero $L > 2r$. In questo caso esistono due angoli che danno lo stesso seno, uno compreso tra 0 e $\pi/2$ e l'altro compreso tra $\pi/2$ e π. Per vedere quali posizioni sono di equilibrio stabile, serve la derivata seconda

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = mg\frac{L}{2}\cos\theta \tag{6.48.9}$$

che è positiva (equilibrio stabile) per $0 < \theta_{eq} < \pi/2$ e negativa (equilibrio instabile) per $\pi/2 < \theta_{eq} < \pi$.

Domanda 3

La frequenza delle piccole oscillazioni si trova ponendo $\theta = \theta_{eq} + \delta$ nell'espressione dell'energia

$$E = \frac{m}{2}\dot{z}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - mg\left[r\theta - \frac{L}{2}\cos\theta\right] \tag{6.48.10}$$

Sviluppando al secondo ordine si trova

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}\left(mr^2 + I\right)\dot{\delta}^2 - mg\left[r\left(\theta_{eq}+\delta\right) - \frac{L}{2}\cos\left(\theta_{eq}+\delta\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(mr^2 + I\right)\dot{\delta}^2 - mg\left[r\left(\theta_{eq}+\delta\right) - \frac{L}{2}\cos\theta_{eq} + \frac{L}{2}\delta\sin\theta_{eq} - \frac{1}{2}\frac{L}{2}\delta^2\cos\theta_{eq}\right] + O(\delta^2) \\
&= \frac{1}{2}\left(mr^2 + I\right)\dot{\delta}^2 + \frac{1}{2}mg\frac{L}{2}\delta^2\cos\theta_{eq} + \text{costante} + O(\delta^2)
\end{aligned} \tag{6.48.11}$$

Il momento d'inerzia rispetto al perno è dato dalla somma dei contributi del disco e dell'asta (che si ottiene usando il teorema di Koenig):

$$I = \frac{1}{2}mr^2 + \left[\frac{1}{12}mL^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2\right] = m\left(\frac{r^2}{2} + \frac{L^2}{3}\right) \tag{6.48.12}$$

La pulsazione delle piccole oscillazioni è data infine da

$$\begin{aligned}
\Omega^2 &= \frac{\frac{L}{2}\cos\theta_{eq}}{I + mr^2} = \frac{mg\frac{L}{2}\sqrt{1-\sin^2\theta_{eq}}}{m\left(\frac{3}{2}r^2 + \frac{1}{3}L^2\right)} \\
&= \frac{g\frac{L}{2}\sqrt{1-\frac{4r^2}{L^2}}}{\left(\frac{3}{2}r^2 + \frac{1}{3}L^2\right)} = \frac{g\sqrt{\frac{L^2}{4} - r^2}}{\left(\frac{3}{2}r^2 + \frac{1}{3}L^2\right)}
\end{aligned} \tag{6.48.13}$$