PROBLEMA 6.49

Un carretto in discesa ⋆⋆

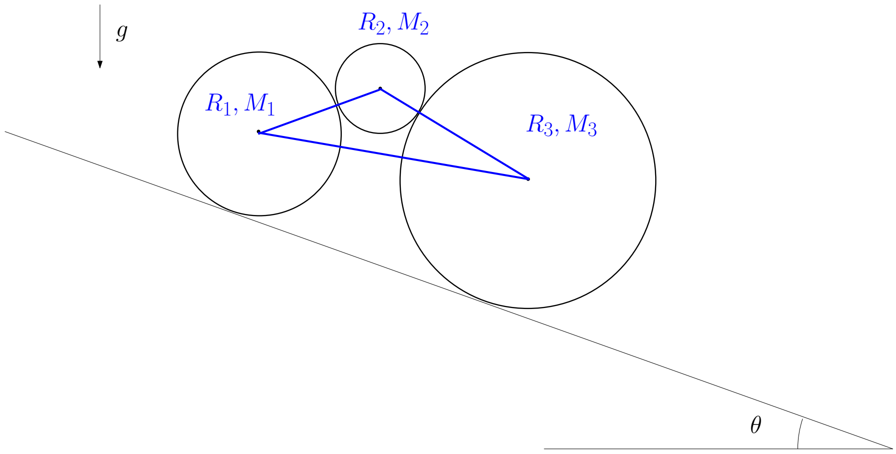

Figura 6.47.: Lo schema del carrello. I tre cilindri hanno massa M_1, M_2, M_3 e raggi R_1, R_2, R_2.

Un carretto è costruito come in Figura 6.47 da tre cilindri uniti tra loro da tre barre rigide e prive di massa. I cilindri possono ruotare liberamente attorno al proprio asse. Si ha rotolamento puro sia nei punti di contatto tra i cilindri, sia nel contatto tra cilindri e piano.

Il carretto è appoggiato su un piano inclinato di un angolo θ rispetto all'orizzontale, ed è immerso in un campo gravitazionale costante.

1. Il carretto può scendere lungo il piano per qualsiasi valore di R_1, R_2 e R_3?

2. Calcolare l'accelerazione del carretto.

Soluzione

Se indichiamo con ω_1, ω_2 e ω_3 le velocità angolari dei tre cilindri le condizioni di rotolamento puro sul piano inclinato danno

$$v_{cm} = -R_1\omega_1 \tag{6.49.1}$$
$$v_{cm} = -R_3\omega_3 \tag{6.49.2}$$

dove v_{cm} è la velocità del centro di massa del carretto, parallela al piano. Imponendo rotolamento puro anche nei punti di contatto tra i cilindri abbiamo inoltre

$$\omega_1 R_1 = -\omega_2 R_2 \tag{6.49.3}$$
$$\omega_3 R_3 = -\omega_2 R_2 \tag{6.49.4}$$

Abbiamo quattro condizioni per le quattro variabili v_{cm}, ω_1, e ω_3 che però non sono tutte indipendenti tra loro: ad esempio sottraendo membro a membro le Equazioni (6.49.1) e (6.49.2) oppure le Equazioni (6.49.3) e (6.49.4) otteniamo infatti lo stesso risultato. In conclusione è possibile esprimere tutte le velocità angolari in funzione della velocità v_{cm}

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= -\frac{v_{cm}}{R_1} \\
\omega_2 &= \frac{v_{cm}}{R_2} \\
\omega_3 &= -\frac{v_{cm}}{R_3}
\end{aligned}$$

ma quest'ultima può avere un valore arbitrario e quindi la discesa è possibile.

Un metodo veloce per calcolare l'accelerazione è scrivere l'energia del carretto. Abbiamo

$$E = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 + \frac{1}{2}I_3\omega_3^2 + \frac{1}{2}\left(M_1 + M_2 + M_3\right)v_{cm}^2 + \left(M_1 + M_2 + M_3\right)gh \quad (6.49.5)$$

dove $I_1 = M_1R_1^2/2$, $I_2 = M_2R_2^2/2$ e $I_3 = M_3R_3^2/2$ sono i momenti di inerzia dei cilindri rispetto ad un asse passante per il centro di massa. Possiamo anche scrivere

$$h = h_0 - s_{cm}\sin\theta$$

dove s_{cm} è lo spostamento del centro di massa rispetto alla posizione iniziale, che si trova ad una quota h_0. Chiaramente $v_{cm} = \dot{s}_{cm}$. Sostituendo abbiamo

$$E = \frac{1}{2}\frac{3}{2}\left(M_1 + M_2 + M_3\right)\dot{s}_{cm}^2 + \left(M_1 + M_2 + M_3\right)g\left(h_0 - s_{cm}\sin\theta\right) \quad (6.49.6)$$

e derivando rispetto al tempo

$$\frac{3}{2}\left(M_1 + M_2 + M_3\right)\dot{s}_{cm}\ddot{s}_{cm} - \left(M_1 + M_2 + M_3\right)g\dot{s}_{cm}\sin\theta = \dot{E} = 0 \quad (6.49.7)$$

da cui

$$\ddot{s}_{cm} = \frac{2}{3}g\sin\theta \quad (6.49.8)$$