PROBLEMA 6.4

Tensore di inerzia e traslazioni ⋆⋆⋆

Supponendo noto il tensore di inerzia di un corpo rispetto al suo centro di massa, calcolare quello di un corpo identico traslato di $\vec{a}$.

Soluzione

Le componenti del tensore di inerzia riferito al centro di massa si scrivono nella forma

$$I^{ab}_{cm} = \sum_i m_i \left(r_i^2 \delta^{ab} - r_i^a r_i^b \right) .$$

Con una traslazione definiamo un nuovo sistema di coordinate con origine in $-\vec{a}$

$$\vec{u}_i = \vec{r}_i + \vec{a}$$

e sostituendo abbiamo

$$I^{ab}_{cm} = \sum_i m_i \left[(\vec{u}_i + \vec{a})^2 \delta^{ab} - (u_i^a + a^a) \left(u^b + a^b \right) \right]$$

ossia

$$I^{ab}_{cm} = \sum_i m_i \left[\left(u_i^2 + a^2 - 2\vec{u}_i \cdot \vec{a} \right) \delta^{ab} - \left(u_i^a u_i^b + a^a a^b - u_i^a a^b - a^a u_i^b \right) \right] .$$

Separando i diversi termini abbiamo

$$\begin{aligned} I^{ab}_{cm} &= \sum_i m_i \left[u_i^2 \delta^{ab} - u_i^a u_i^b \right] \\ &- \left[2\delta^{ab} \vec{a} \cdot \sum_i m_i \vec{u}_i - \left(a^b \sum_i m_i u_i^a + a^a \sum_i m_i u_i^b \right) \right] \\ &+ \left[a^2 \delta^{ab} - a^a a^b \right] \sum_i m_i \end{aligned}$$

e tenendo conto che

$$\begin{aligned} \sum_i m_i \vec{u}_i &= \vec{u}_{CM} = \vec{a} \\ \sum_i m_i &= M \end{aligned}$$

abbiamo

$$\begin{aligned} I^{ab}_{cm} &= \sum_i m_i \left[u_i^2 \delta^{ab} - u_i^a u_i^b \right] \\ &- 2M \left[a^2 \delta^{ab} - a^a a^b \right] \\ &+ M \left[a^2 \delta^{ab} - a^a a^b \right] . \end{aligned}$$

Riassumendo abbiamo

$$I^{ab} = I^{ab}_{cm} + M \left[a^2 \delta^{ab} - a^a a^b \right]$$