PROBLEMA 6.58

Sistema di punti materiali equivalenti ad una sfera ⋆⋆⋆

Si vuole sostituire una sfera omogenea di massa M e raggio R con un insieme di punti materiali identici di collegati rigidamente tra loro, in modo che i due sistemi abbiano le stesse proprietà dinamiche. Qual'è il minimo numero di punti materiali necessari? Che massa devono avere? Come devono essere disposti?

Soluzione

Per avere le stesse proprietà dinamiche della sfera il sistema costruito deve avere la stessa massa totale e lo stesso tensore di inerzia. Ponendo il polo nel centro di massa questo sarà della forma

$$I = \frac{2}{5}MR^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mostriamo anzitutto che sono necessari almeno quattro punti materiali. Un unico punto ha un tensore di inerzia nullo. Con due punti abbiamo una asse (quello passante per essi) con momento di inerzia nullo, ma una sfera ha un momento di inerzia $\frac{2}{5}MR^2$ lungo un asse qualsiasi. Infine, tre punti appartengono necessariamente ad un piano. Si è verificato in un esercizio precedente (Esercizio 6.12) che il momento di inerzia perpendicolare a tale piano è uguale alla somma dei momenti di inerzia relativi a due assi appartenenti allo stesso, mentre nel caso che ci interessa dovrebbero essere tutti uguali.

Consideriamo adesso le coordinate di quattro punti materiali. Introduciamo le quantità

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= (x_1, x_2, x_3, x_4) \\ \boldsymbol{v} &= (y_1, y_2, y_3, y_4) \\ \boldsymbol{w} &= (z_1, z_2, z_3, z_4) \end{aligned}$$

dove x_i, y_i e z_i sono le coordinate del punto materiale i-simo. Dato che il centro di massa è nell'origine deve essere

$$\sum_i x_i = \sum_i y_i = \sum_i z_i = 0$$

quindi $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ appartengono tutti al sottospazio di $\mathbb{R}^4$ dei vettori con somma delle componenti nulle. Ciascun punto avrà massa totale $M/4$. Per ottenere i corretti elementi sulla diagonale del tensore di inerzia dovrà essere

$$\begin{aligned}
I_{zz} = \frac{M}{4}\sum_i \left(x_i^2 + y_i^2\right) &= \frac{M}{4}\left(|\boldsymbol{u}|^2 + |\boldsymbol{v}|^2\right) = \frac{2}{5}MR^2 \\
I_{yy} = \frac{M}{4}\sum_i \left(x_i^2 + z_i^2\right) &= \frac{M}{4}\left(|\boldsymbol{u}|^2 + |\boldsymbol{w}|^2\right) = \frac{2}{5}MR^2 \\
I_{xx} = \frac{M}{4}\sum_i \left(z_i^2 + y_i^2\right) &= \frac{M}{4}\left(|\boldsymbol{w}|^2 + |\boldsymbol{v}|^2\right) = \frac{2}{5}MR^2
\end{aligned}$$

da cui segue

$$|\boldsymbol{u}|^2 = |\boldsymbol{v}|^2 = |\boldsymbol{w}|^2 = \frac{4}{5}R^2$$

Inoltre gli elementi fuori diagonale sono nulli, quindi

$$\begin{aligned}
I_{xy} &= -\frac{M}{4}\sum_i x_i y_i = -\frac{M}{4}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = 0 \\
I_{xz} &= -\frac{M}{4}\sum_i x_i z_i = -\frac{M}{4}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w} = 0 \\
I_{yz} &= -\frac{M}{4}\sum_i y_i z_i = -\frac{M}{4}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} = 0
\end{aligned}$$

cioè i tre vettori sono ortogonali tra loro. Una base nel sottospazio desiderato si può scegliere ad esempio nella forma

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, -1) \\
\boldsymbol{e}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 1, 0) \\
\boldsymbol{e}_3 &= \frac{1}{2}(1, -1, -1, 1)
\end{aligned}$$

e quindi potremo scrivere

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u} &= \sqrt{\frac{4}{5}}R\boldsymbol{e}_1 = \sqrt{\frac{2}{5}}R\begin{pmatrix}1, & 0, & 0, & -1\end{pmatrix} \\
\boldsymbol{v} &= \sqrt{\frac{4}{5}}R\boldsymbol{e}_2 = \sqrt{\frac{2}{5}}R\begin{pmatrix}0, & -1, & 1, & 0\end{pmatrix} \\
\boldsymbol{w} &= \sqrt{\frac{4}{5}}R\boldsymbol{e}_3 = \sqrt{\frac{2}{5}}R\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}, & -\frac{1}{\sqrt{2}}, - & \frac{1}{\sqrt{2}}, & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Questa è solo una delle soluzioni possibili. Tutte le altre si possono ottenere ruotando la base scelta, rimanendo però nel sottospazio scelto. Questo è equivalente ad una rotazione rigida arbitraria del sistema attorno all'origine, come ci si può aspettare. In conclusione le masse devono essere poste nei punti

$$\vec{r}_1 = \sqrt{\frac{2}{5}} R \left(1, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$\vec{r}_2 = \sqrt{\frac{2}{5}} R \left(0, -1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$\vec{r}_3 = \sqrt{\frac{2}{5}} R \left(0, 1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$\vec{r}_4 = \sqrt{\frac{2}{5}} R \left(-1, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Tutti gli $\vec{r}_i$ hanno la stessa lunghezza,

$$|\vec{r}_i| = \sqrt{\frac{3}{5}} R$$

e l'angolo tra due qualsiasi di essi è dato da

$$\cos\theta = \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{r}_j}{|\vec{r}_i|\,|\vec{r}_j|} = -\frac{1}{3} \qquad (i \neq j)$$

Le masse si trovano quindi ai vertici di un tetraedro, che per quanto visto può essere ruotato arbitrariamente attorno all'origine.