PROBLEMA 6.61

Distacco da una calotta sferica ⋆⋆

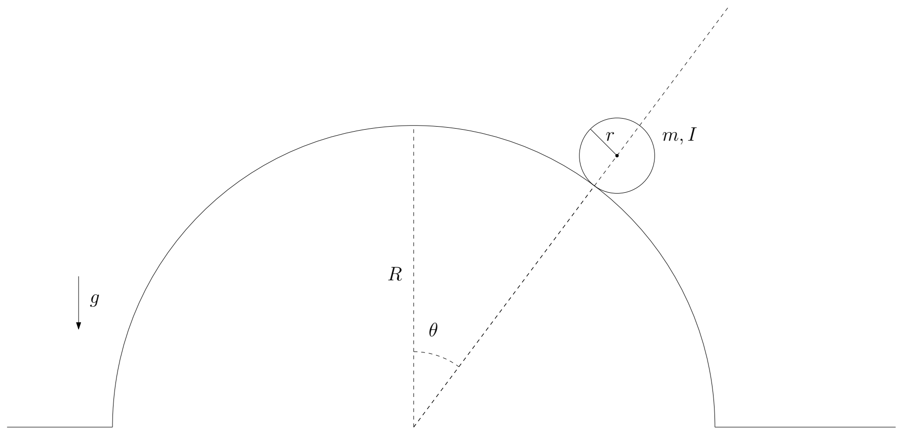

Figura 6.62.: Il corpo sferico in caduta dalla calotta.

Dalla sommità di una calotta sferica di raggio R viene lasciato cadere, con velocità iniziale trascurabile, un corpo rigido è di forma sferica (raggio r). La massa totale m è distribuita simmetricamente attorno al centro del corpo in modo tale che questo ha un momento di inerzia I rispetto ad un asse passante per il centro.

Se il cilindro rotola senza strisciare sulla calotta determinare l'angolo a cui avviene il distacco. Considerare in particolare il caso di massa distribuita uniformemente, e quello corrispondente al massimo e minimo valore possibile per I. Come deve essere distribuita la massa negli ultimi due casi?

Soluzione

Scriviamo l'energia totale del sistema, utilizzando l'angolo θ in figura come coordinata. Abbiamo

$$E = \frac{1}{2}I'\omega^2 + mg\,(R+r)\cos\theta$$

dove

$$I' = I + mr^2$$

è il momento di inerzia del corpo rispetto al punto di contatto e ω la sua velocità angolare. Per determinare quest'ultima notiamo che il centro del corpo compie un moto circolare con velocità

$$v = (R+r)\,\dot{\theta}$$

che deve però anche essere, data la condizione di puro rotolamento,

$$v = -\omega r$$

da cui

$$\omega = -\left(1+\frac{R}{r}\right)\dot{\theta}$$

Sostituendo nell'energia troviamo

$$E = \frac{1}{2}I'\left(1+\frac{R}{r}\right)^2\dot{\theta}^2 + mg\left(R+r\right)\cos\theta$$

Uguagliando all'energia iniziale ($\theta = 0$, $\dot{\theta} = 0$) otteniamo

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2mg}{I'}\frac{r^2}{(R+r)}\left(1-\cos\theta\right)$$

che ci permette di conoscere $\dot{\theta}^2$ in funzione dell'angolo.

Dato che il centro di massa del corpo compie un moto circolare, l'equazione del moto nella direzione radiale sarà

$$-m\left(R+r\right)\dot{\theta}^2 = N - mg\cos\theta$$

dove N è la reazione normale della superficie della calotta. Il distacco si avrà per $N = 0$, ossia per

$$N = mg\left[\cos\theta - \frac{2mr^2}{I'}\left(1-\cos\theta\right)\right] = 0$$

Questo significa

$$\cos\theta = \frac{2mr^2}{I'}\left(1+\frac{2mr^2}{I'}\right)^{-1}$$

Se la massa è distribuita uniformemente

$$I' = \frac{2}{5}mr^2 + mr^2 = \frac{7}{5}mr^2$$

e quindi

$$\cos\theta = \frac{10}{17} \simeq 0.588$$

Il minimo valore di I si ottiene concentrando tutta la massa nel centro. In questo caso $I = 0$ e $I' = mr^2$, quindi

$$\cos\theta = \frac{2}{3} \simeq 0.667$$

lo stesso valore che si ottiene per la caduta di un punto materiale. Il massimo valore di I si ottiene concentrando tutta la massa sulla superficie esterna del corpo (si deve mantenere la distribuzione simmetrica). In questo caso

$$\begin{aligned}
I &= \frac{m}{4\pi r^2}\int r^4\sin^2\theta d\cos\theta d\phi \\
&= \frac{mr^2}{2}\int_{-1}^{1}\left(1-u^2\right)du \\
&= \frac{2}{3}mr^2
\end{aligned}$$

Segue che $I' = 5mr^2/3$ e quindi

$$\cos\theta = \frac{6}{11} \simeq 0.545$$

Da notare che questo è il caso in cui il distacco avviene più in basso.