PROBLEMA 6.62

Piccole oscillazioni di un cilindro parabolico ⋆⋆⋆

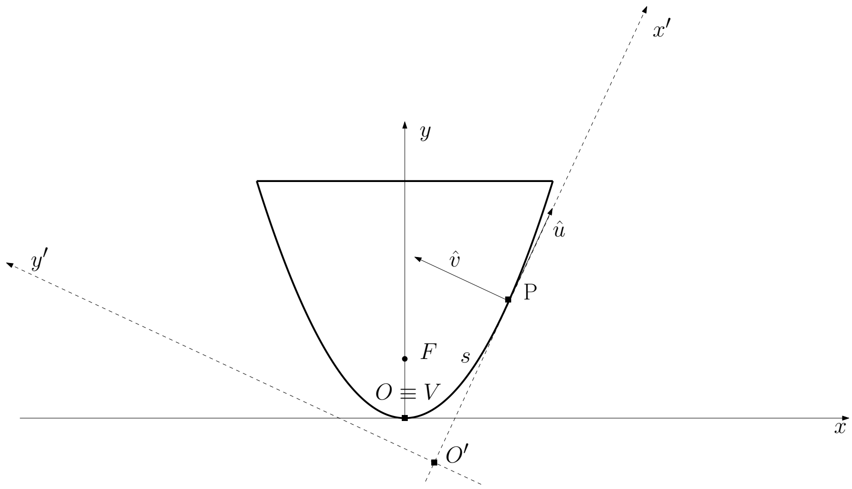

Figura 6.63.: Il cilindro parabolico nella posizione di equilibrio. L'asse rispetto al quale si vuole calcolare il momento di inerzia passa per il vertice della parabola V ed è diretto lungo l'asse z.

Un cilindro parabolico pieno è costruito con un materiale omogeneo ed è tagliato parallelamente alla direttrice della parabola che lo genera ad una altezza tale che il suo centro di massa coincide con il suo fuoco (Figura 6.63). La distanza tra il vertice e il fuoco della parabola è $p/2$, la massa totale m.

1. Discutere in maniera generale la posizione del centro di massa in funzione dell'altezza di taglio, considerando sempre tagli paralleli alla direttrice della parabola. Determinare l'altezza alla quale è stato tagliato il cilindro.

2. Supponendo che il cilindro rotoli senza strisciare su di un piano, descrivere la traiettoria percorsa dal suo fuoco nel sistema di riferimento solidale con il piano.

3. Calcolare il momento di inerzia del cilindro rispetto ad un asse passante per il vertice della parabola e perpendicolare alle basi.

4. Determinare la velocità angolare ω del cilindro in funzione dell'angolo di rotazione.

5. Discutere le piccole oscillazioni del cilindro attorno alla posizione di equilibrio.

Soluzione

1. Consideriamo il cilindro nella posizione in Figura 6.63. La parabola generatrice avrà equazione
$$y = \frac{x^2}{2p}$$
Dato che la massa è distribuita uniformemente, le coordinate del centro di massa saranno date da $x_{CM} = 0$ (per ragioni di simmetria) e da
$$y_{CM} = \frac{\int\int y\, dS}{\int\int dS}$$
Scriviamo l'espressione precedente nella forma
$$y_{CM} = \frac{\int_0^h dy \int_{-\sqrt{2py}}^{\sqrt{2py}} dx\, y}{\int_0^h dy \int_{-\sqrt{2py}}^{\sqrt{2py}} dx}$$
dove abbiamo indicato con h l'altezza del taglio. La prima integrazione è immediata ed abbiamo infine
$$y_{CM} = \frac{2\sqrt{2p}\int_0^h dy\, y^{3/2}}{2\sqrt{2p}\int_0^h dy\, y^{1/2}} = \frac{3}{5}h$$
Notare che il denominatore è la superfice totale della base
$$S = \frac{4}{3}\sqrt{2p}h^{3/2}$$
che ci servirà in seguito. Se il centro di massa deve coincidere con il fuoco avremo
$$\frac{3}{5}h = \frac{p}{2}$$
da cui
$$h = \frac{5}{6}p$$
L'equazione della parabola sarà dunque
$$y = \frac{5x^2}{12h}$$

2. Possiamo indicare con s la lunghezza dell'arco tra il vertice V della parabola e il punto di contatto P con il piano ad un istante generico. Una coppia di versori

normali e tangenti alla parabola in $P \equiv \left(x, \frac{x^2}{2p}\right)$ sono dati da

$$
\begin{aligned}
\hat{u} &= \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{p^2+x^2}} \begin{pmatrix} p \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \\
\hat{v} &= \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} \begin{pmatrix} -y' \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{p^2+x^2}} \begin{pmatrix} -x \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

dove θ è l'angolo di rotazione del cilindro. Dato che la parabola ruota senza strisciare è anche la distanza $\overline{O'P}$ rispetto al punto di appoggio iniziale. Quindi le coordinate del fuoco della parabola saranno

$$
\begin{aligned}
x_F &= s + \overrightarrow{PF} \cdot \hat{u} \\
y_F &= \overrightarrow{PF} \cdot \hat{v}
\end{aligned}
$$

ossia, dato che

$$
\overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} -x \\ \frac{p}{2} - \frac{x^2}{2p} \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
x_F &= s - \frac{x}{\sqrt{p^2+x^2}} \left(\frac{p}{2} + \frac{x^2}{2p}\right) \\
y_F &= \frac{1}{\sqrt{p^2+x^2}} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{p^2}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Per quanto riguarda s, avremo

$$
\begin{aligned}
s &= \int \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \\
&= \int_0^x \sqrt{1+y'^2} dx \\
&= p \int_0^{x/p} \sqrt{1+u^2} du \\
&= \frac{p}{2} \left[\left(\frac{x}{p}\right) \sqrt{1 + \left(\frac{x}{p}\right)^2} + \sinh^{-1}\left(\frac{x}{p}\right) \right]
\end{aligned}
$$

e quindi

$$
\begin{aligned}
x_F &= -\frac{p}{2} \log\left(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right) \\
y_F &= \frac{p}{2} \frac{1}{\cos\theta}
\end{aligned}
$$

Questa è la traiettoria del fuoco espressa parametricamente in funzione dell'angolo di rotazione. Si può anche eliminare θ. Abbiamo infatti

$$
y_F = \frac{p}{2} \cosh\left(\frac{2x_F}{p}\right)
$$

3. Il momento di inerzia si può determinare direttamente dall'integrale

$$
\begin{aligned}
I_V &= \frac{m}{S}\int_0^h dy \int_{-\sqrt{2py}}^{\sqrt{2py}} dx\,\left(x^2+y^2\right) \\
&= \frac{3}{4}m\frac{1}{\sqrt{2p}h^{3/2}}\int_0^h dy\left[\frac{2}{3}\left(2py\right)^{3/2}+2\sqrt{2py}y^2\right] \\
&= \frac{3}{4}m\left[\frac{8}{15}ph+\frac{4}{7}h^2\right]=\frac{53}{84}mp^2
\end{aligned}
$$

dove S è la superfice della base determinata precedentemente. Per il seguito sarà utile il momento di inerzia rispetto al centro di massa,

$$
I_{CM} = I_V - m\frac{p^2}{4} = \frac{8}{21}mp^2
$$

4. La velocità angolare cercata è semplicemente $\dot{\theta}$. Usiamo la conservazione dell'energia per valutarla ad un angolo di rotazione generico. Possiamo scrivere questa nella forma

$$
E = \frac{1}{2}I\left(\theta\right)\omega^2 + mgy_F
$$

Dove $I(\theta)$ è il momento di inerzia del cilindro rispetto a P, che possiamo ottenere applicando il teorema di Steiner,

$$
\begin{aligned}
I(\theta) &= I_{CM} + m\overline{FP}^2 \\
&= I_{CM} + m\left[x^2+\left(\frac{p}{2}-\frac{x^2}{2p}\right)^2\right] \\
&= I_{CM} + mp^2\left[\tan^2\theta+\frac{1}{4}\left(1-\tan^2\theta\right)^2\right]
\end{aligned}
$$

e y_F ha il valore determinato precedentemente. Abbiamo quindi

$$
\omega = \sqrt{\frac{mgp}{I(\theta)}\left(1-\frac{1}{\cos\theta}\right)}
$$

5. Per piccole oscillazioni possiamo considerare $\theta \ll 1$ e sviluppare l'energia al secondo ordine. Otteniamo, a meno di una costante irrilevante

$$
E = \frac{1}{2}I\left(0\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mg\frac{p}{2}\theta^2
$$

con

$$
I(0) = I_{CM} + \frac{1}{4}mp^2 = \frac{53}{84}mp^2
$$

da cui possiamo calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni

$$
f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{42g}{53p}}
$$