PROBLEMA 6.64

Urto tra una massa e un sistema con cilindro rotante ⋆⋆

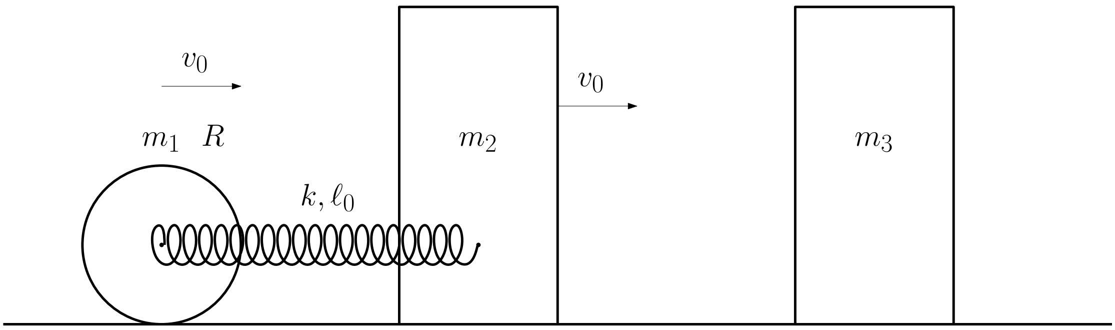

Figura 6.67.: Il sistema descritto nell'esercizio. Le masse m_2 e m_3 scorrono sul piano senza attrito, il cilindro rotola senza strisciare.

Un cilindro di massa m_1 e raggio R è collegato ad una massa m_2 da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo ℓ_0. La massa m_2 può muoversi sul piano senza attrito, mentre il cilindro è vincolato a ruotare senza strisciare. Inizialmente entrambi i corpi si muovono come in Figura 6.67, con la stessa velocità v_0 e con la molla alla lunghezza di riposo. Avviene quindi un urto istantaneo completamente anelastico tra la massa m_2 e una massa m_3: anche quest'ultima può muoversi senza attrito sul piano orizzontale. Calcolare la massima compressione raggiunta successivamente dalla molla.

Soluzione

Durante l'urto la molla rimane alla sua lunghezza di riposo, dato che questo avviene istantaneamente. Quindi non ci sono forze esterne orizzontali applicate al sistema $m_2 + m_3$ e la sua quantità di moto si conserva. Detta v_0' la velocità di $m_2 + m_3$ dopo l'urto abbiamo

$$m_2 v_0 = (m_2 + m_3)\, v_0'$$

e quindi

$$v_0' = \frac{m_2}{m_2 + m_3} v_0$$

Per la stessa ragione (molla a riposo) non ci sono forze esterne orizzontali che agiscono su m_1, quindi la sua quantità di moto non cambia e la sua velocità immediatamente dopo l'urto rimane v_0.

Abbiamo adesso il sistema rappresentato in Figura 6.68. L'energia si conserva, e la possiamo scrivere nella forma

$$E = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} (m_2 + m_3)\, v_{2+3}^2 + \frac{k}{2} \Delta^2$$

dove abbiamo indicato con

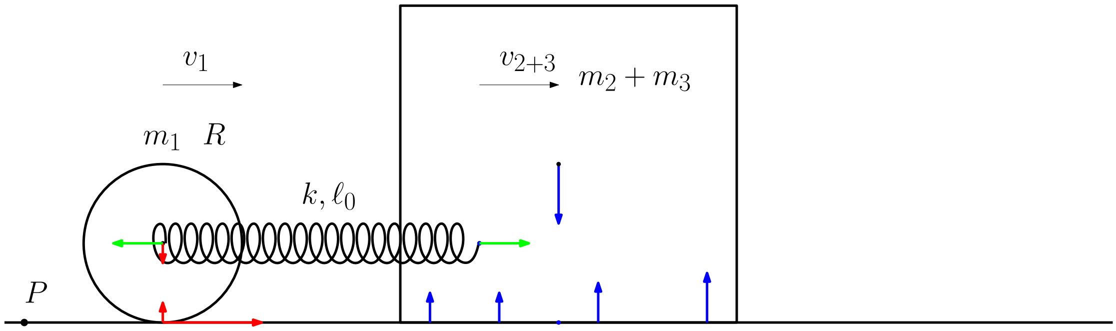

Figura 6.68.: Il sistema dopo l'urto. In rosso sono rappresentate le forze esterne che agiscono sul cilindro, in blu quelle che agiscono sul corpo $m_2 + m_3$, in verde quelle interne.

- ω la velocità angolare del cilindro;
- v_1 la velocità del centro di massa del cilindro;
- I_{CM} il momento di inerzia del cilindro rispetto al suo asse, che passa dal centro di massa;
- v_{2+3} la velocità del corpo $m_2 + m_3$;
- Δ la compressione della molla.

Nel momento di massima compressione abbiamo $v_1 = v_{2+3} \equiv v_f$. Inoltre dalla condizione di puro rotolamento segue che $\omega = -v_1/R$. Di conseguenza eguagliando l'energia immediatamente dopo l'urto a quella nel momento di massima compressione otteniamo (usando $I_{CM} = m_1 R^2/2$)

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}m_1 + \frac{m_2^2}{m_2 + m_3}\right) v_0^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}m_1 + m_2 + m_3\right) v_f^2 + \frac{k}{2}\Delta_{MAX}^2$$

Per calcolare v_f ci serva un'altra legge di conservazione. La quantità di moto orizzontale del sistema non si conserva: infatti a si scrive vincolo di puro rotolamento al cilindro è applicata una reazione orizzontale. La seconda equazione cardinale applicata al cilindro, rispetto ad un polo posto nel punto di contatto, si scrive

$$\frac{d}{dt}\left(I_{CM}\omega - m_1 v_1 R\right) = k\Delta R$$

mentre la prima equazione per il corpo $m_2 + m_3$ si scrive

$$\frac{d}{dt}\left[\left(m_2 + m_3\right) v_{2+3}\right] = k\Delta$$

Moltiplicando quest'ultima membro a membro per R e sottraendo alla prima abbiamo

$$\frac{d}{dt}\left[I_{CM}\omega - m_1 v_1 R - \left(m_1 + m_2\right) R v_{2+3}\right] = 0$$

Di conseguenza la quantità

$$A = -\frac{3}{2}m_1 v_1 R - (m_2 + m_3)\, R v_{2+3}$$

si conserva. Da notare che questo non è in generale il momento angolare totale rispetto al punto di appoggio del cilindro, che si scriverebbe (indicando con h_{CM} l'altezza del centro di massa del corpo m_{2+3})

$$L = -\frac{3}{2}m_1 v_1 R - (m_2 + m_3)\, h_{CM} v_{2+3}$$

e non sarebbe conservato. La non conservazione è dovuta al momento delle reazioni normali distribuite che il piano esercita sul corpo $m_2 + m_3$.

Eguagliando il valore iniziale e finale di A troviamo

$$v_f = \frac{\frac{3}{2}m_1 + m_2}{\frac{3}{2}m_1 + m_2 + m_3} v_0$$

e sostituendo nella conservazione dell'energia troviamo

$$k\Delta^2_{MAX} = \left[6m_1 + \frac{2m_2^2}{m_2 + m_3} - \frac{2\left(\frac{3}{2}m_1 + m_2\right)^2}{3m_1 + 2m_2 + 2m_3}\right] v_0^2$$