PROBLEMA 6.66

Energia persa e rotolamento puro ⋆⋆

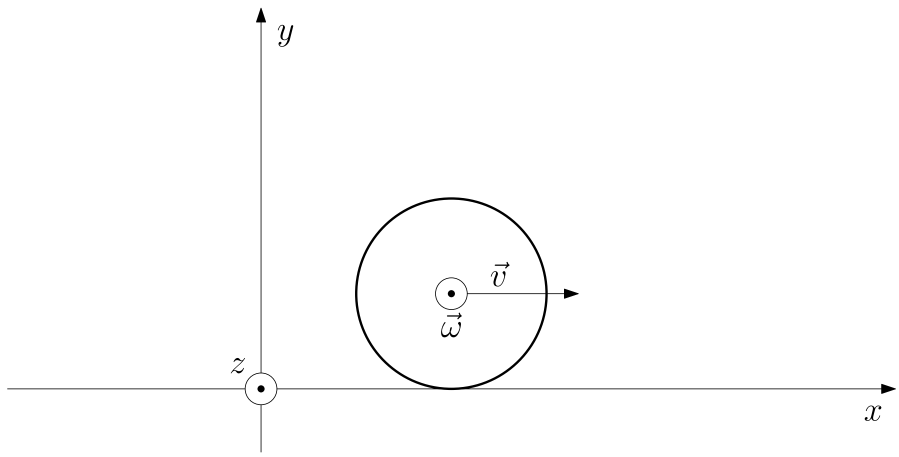

Figura 6.70.: La sfera lanciata su un piano orizzontale.

Una sfera di raggio R e massa M viene lanciata su un piano orizzontale con velocità angolare $\vec{\omega}$ e velocità del centro di massa $\vec{v}$, scelte come in Figura6.70. Tra sfera e piano si ha attrito dinamico.

1. Mostrare che il momento angolare del cilindro rispetto a un polo scelto opportunamente si conserva.

2. Scrivere l'energia della sfera in funzione del momento angolare conservato e della velocità istantanea del punto del cilindro a contatto con il piano.

3. Utilizzare l'espressione dell'energia cinetica ottenuta per calcolare il valore dell'energia che viene dissipata per attrito prima che la sfera inizi a rotolare senza strisciare.

Soluzione

Consideriamo la retta sulla quale si muove il punto di contatto tra sfera e piano. Se scegliamo il polo in un punto qualsiasi di questa, vediamo che il momento angolare si conserva. Infatti le uniche forze che agiscono sulla sfera sono

- la reazione normale del piano $N\hat{y}$
- la forza di gravità $-Mg\hat{y}$
- La forza di attrito $F_a\hat{x}$

Dato che il centro di massa della sfera non accelera nella direzione $\hat{y}$ deve essere $N = Mg$. Ma entrambe le forze hanno lo stesso braccio rispetto al polo scelto, quindi i rispettivi momenti si cancellano. Inoltre la forza di attrito ha braccio nullo: la conclusione è che il momento di forza totale applicato alla sfera è nullo, e il suo momento angolare si conserva, e vale

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge M\vec{v} + I_{CM}\vec{\omega}$$

Dato che $\vec{\omega} = \omega\hat{z}$, $\vec{v} = v\hat{x}$ e $\vec{r} = x\hat{x} + R\hat{y}$ abbiamo

$$\vec{L} = (I_{CM}\omega - MRv)\,\hat{z} \equiv L_z\hat{z}$$

La velocità del punto di contatto è invece

$$\vec{v}_0 = \vec{v} - R\vec{\omega} \wedge \hat{y} = (v + R\omega)\,\hat{x} \equiv v_o\hat{x}$$

Esprimendo ω e v in funzione di L_z e v_0 otteniamo

$$\begin{aligned} v &= \frac{I_{CM}v_0 - RL_z}{I_{CM} + mR^2} = \frac{I_{CM}v_0 - RL_z}{I_O} \\ \omega &= \frac{L_z + MRv_0}{I_{CM} + mR^2} = \frac{L_z + MRv_0}{I_O} \end{aligned}$$

dove I_O è il momento di inerzia rispetto al punto di contatto.

L'energia vale

$$E = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2$$

e sostituendo le espressioni precedenti troviamo

$$E = \frac{1}{2}\frac{L_z^2}{I_0} + \frac{1}{2}\frac{I_{CM}}{I_0}Mv_o^2$$

Quando la sfera inizia a rotolare senza strisciare si ha $v_o = 0$. Inoltre L_z si è conservato. Segue che l'energia dissipata è il secondo termine dell'equazione precedente, ossia

$$E_{diss} = \frac{1}{2}\frac{I_{CM}}{I_0}Mv_o^2$$

In particolare se tutta la massa è concentrata al centro della sfera $I_{CM} = 0$ e non viene dissipata energia.