PROBLEMA 6.69

Piccole oscillazioni di anelli ⋆⋆⋆

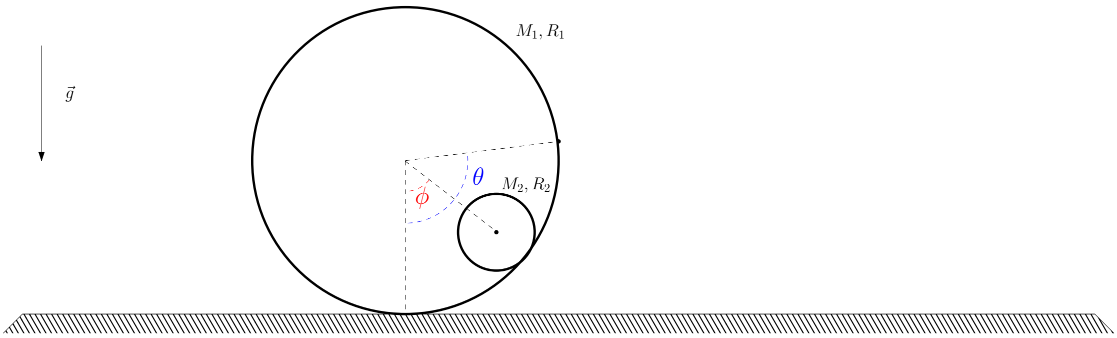

Figura 6.73.: I due anelli, e due possibili coordinate che si possono introdurre per descriverne il moto. Si ha rotolamento puro sia tra l'anello grande e il piano orizzontale, sia tra i due anelli.

Due anelli di massa M_1, M_2 e raggio R_1, $R_2 < R_1$ possono muoversi in un piano verticale. L'anello di massa M_1 è appoggiato su un piano orizzontale sul quale può compuere un moto di puro rotolamento. L'anello di massa M_2 si trova all'interno del primo. I due anelli sono vincolati da una condizione di rotolamento puro.

Dopo avere introdotto delle coordinate opportune, scrivere le equazioni del moto del sistema e risolverle nel regime di piccole oscillazioni rispetto alla posizione di equilibrio.

Soluzione

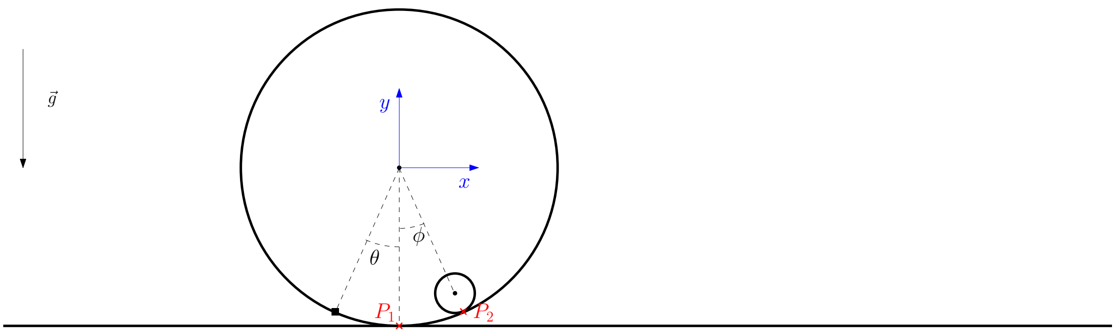

Figura 6.74.: Le coordinate utilizzate per descrivere il sistema. L'angolo ϕ definisce la posizione del disco piccolo, l'angolo θ la rotazione del disco grande.

Il sistema ha due gradi di libertà. Per descriverlo utilizzeremo due angoli θ e ϕ, definiti come in Figura 6.74. Per quanto riguarda le posizioni di equilibrio, notiamo che tutti i valori di θ sono equivalenti. Al contrario, avremo equilibrio stabile solo per $\phi = 0$, e quindi potremo considerare ϕ (e $\dot{\phi}$) piccolo nel regime di piccole oscillazioni.

Cerchiamo di determinare due equazioni del moto che lo descrivano completamente. Poniamoci in un sistema non inerziale che trasla insieme al centro del disco grande, e cerchiamo equazioni del moto indipendenti dalle reazioni vincolari.

La prima è la seconda equazione cardinale di tutto il sistema, scelta prendendo come polo il punto P_1 in Figura 6.74 posto nel punto di contatto tra disco grande e piano orizzontale. Rispetto ad esso la componente z del momento angolare del disco grande è

$$L_{1z} = 2m_1 R_1^2 \dot{\theta}$$

e quella del disco piccolo, in approssimazione di piccole oscillazioni $\phi \ll 1$

$$L_{2z} = m_2 R_2^2 \omega_2 - m_2 R_2 \left(R_1 - R_2\right) \dot{\phi}$$

Per calcolare la velocità angolare del disco piccolo ω_2 scriviamo la velocità del suo centro di massa come

$$v = \left(R_1 - R_2\right) \dot{\phi}$$

dato che questo compie un moto circolare attorno al centro del disco grande. Possiamo scrivere la stessa velocità, data la condizione di rotolamento puro, come velocità del punto P_2 più velocità relativa ad esso:

$$v = R_1 \dot{\theta} - \omega_2 R_2$$

Confrontando le due espressioni troviamo

$$\omega_2 = \frac{R_1}{R_2}\dot{\theta} - \left(\frac{R_1}{R_2} - 1\right)\dot{\phi}$$

e quindi

$$L_{2z} = m_2 R_1 R_2 \dot{\theta} - 2m_2 R_2 \left(R_1 - R_2\right) \dot{\phi}$$

Possiamo adesso scrivere l'equazione del moto nella forma

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left[R_1\left(2m_1 R_1 + m_2 R_2\right)\dot{\theta} - 2m_2 R_2 \left(R_1 - R_2\right)\dot{\phi}\right] &= -m_2 g \left(R_1 - R_2\right)\phi \\ &\quad + m_2 R_2 a + m_1 R_1 a\end{aligned}$$

Nella seconda riga abbiamo il momento delle forze apparenti: l'accelerazione del sistema di riferimento, data la condizione di rotolamento puro, è

$$a = -R_1 \ddot{\theta}$$

e quindi

$$2R_1\left(\frac{3}{2}m_1 R_1 + m_2 R_2\right)\ddot{\theta} - 2m_2 R_2 \left(R_1 - R_2\right)\ddot{\phi} = -m_2 g \left(R_1 - R_2\right)\phi$$

Per ottenere la seconda equazione, consideriamo adesso la seconda equazione cardinale per il disco piccolo, scritta rispetto al polo P_2. Si tratta di un polo mobile, ma la sua velocità nel sistema che abbiamo scelto è parallela a quella del centro di massa del disco, e quindi non è necessario aggiungere alcun termine alle equazioni del moto.

Sempre nel regime di piccole oscillazioni possiamo calcolare il momento angolare del disco piccolo (del primo ordine nelle velocità) trascurando lo spostamento di P_2 rispetto a P_1, e quindi

$$L'_{2z} = L_{2z}$$

L'equazione del moto sarà allora

$$\frac{d}{dt}\left[m_2 R_1 R_2 \dot{\theta} - 2m_2 R_2 \left(R_1 - R_2\right)\dot{\phi}\right] = m_2 g R_2 \phi - R_2 m_2 a$$

ossia

$$2m_2 R_2 \left(R_1 - R_2\right)\ddot{\phi} = -m_2 g R_2 \phi$$

e sostituendo nella prima equazione otteniamo

$$2R_1\left(\frac{3}{2}m_1 R_1 + m_2 R_2\right)\ddot{\theta} = -2m_2 g \left(R_1 - R_2\right)\phi$$

La seconda equazione è quella di un oscillatore armonico

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{2\left(R_1 - R_2\right)}\phi$$

di frequenza angolare

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{g}{2\left(R_1 - R_2\right)}}$$

Otteniamo la soluzione generale

$$\begin{aligned}
\phi &= A\cos\Omega_1 t + B\sin\Omega_1 t \\
&= \phi_0 \cos\Omega_1 t + \frac{1}{\omega_1}\dot{\phi}_0 \sin\Omega_1 t
\end{aligned}$$

Sostituendo nella prima equazione otteniamo

$$\ddot{\theta} = -\frac{m_2 g \left(R_1 - R_2\right)}{R_1\left(\frac{3}{2}m_1 R_1 + m_2 R_2\right)}\left(\phi_0 \cos\Omega_1 t + \frac{1}{\omega_1}\dot{\phi}_0 \sin\Omega_1 t\right)$$

Integrando due volte abbiamo infine

$$\begin{aligned}
\theta &= \frac{m_2 g \left(R_1 - R_2\right)}{\omega_1^2 R_1\left(\frac{3}{2}m_1 R_1 + m_2 R_2\right)}\left(\phi_0 \cos\Omega_1 t + \frac{1}{\omega_1}\dot{\phi}_0 \sin\Omega_1 t\right) + Ct + D \\
&= \frac{2m_2 \left(R_1 - R_2\right)^2}{R_1\left(\frac{3}{2}m_1 R_1 + m_2 R_2\right)}\left(\phi_0 \cos\Omega_1 t + \frac{1}{\omega_1}\dot{\phi}_0 \sin\Omega_1 t\right) + Ct + D
\end{aligned}$$

Imponiamo le condizioni iniziali:

$$\begin{aligned}
\theta_0 &= \frac{2m_2 \left(R_1 - R_2\right)^2}{R_1 \left(\frac{3}{2}m_1 R_1 + m_2 R_2\right)} \phi_0 + D \\
\dot{\theta}_0 &= \frac{2m_2 \left(R_1 - R_2\right)^2}{R_1 \left(\frac{3}{2}m_1 R_1 + m_2 R_2\right)} \dot{\phi}_0 + C
\end{aligned}$$

e quindi

$$\theta = \frac{2m_2 \left(R_1 - R_2\right)^2}{R_1 \left(\frac{3}{2}m_1 R_1 + m_2 R_2\right)} \left[\phi_0 \left(\cos \Omega_1 t - 1\right) + \dot{\phi}_0 \left(\frac{1}{\omega_1} \sin \Omega_1 t - t\right)\right] + \dot{\theta}_0 t + \theta_0$$

Una soluzione particolare si ottiene per $\phi_0 = 0$ e $\dot{\phi}_0 = 0$. In questo caso

$$\begin{aligned}
\phi(t) &= 0 \\
\theta(t) &= \dot{\theta}_0 t + \theta_0
\end{aligned}$$

Nel sistema di riferimento scelto il disco piccolo rimane sempre in basso, e quello grande ruota con velocità angolare costante. Notare che, a causa della condizione di puro rotolamento, il disco piccolo ruota con velocità angolare

$$\omega_2 = \frac{R_1}{R_2} \dot{\theta}_0$$

In un sistema di riferimento solidale al suolo le soluzioni per $\theta(t)$ e $\phi(t)$ trovate restano valide. Il centro di massa del disco grande sarà però in moto in direzione orizzontale con

$$x_{cm,1}(t) = -R_1 \theta(t)$$

e per il centro di massa del disco piccolo avremo (sempre per piccole oscillazioni)

$$\begin{aligned}
x_{cm,2}(t) &= -R_1 \theta(t) + \left(R_1 - R_2\right) \phi \\
y_{cm,2}(t) &= -\left(R_1 - R_2\right)
\end{aligned}$$

La soluzione può essere interpretata in termini di modi normali a frequenza fissata: nel primo modo (di frequenza angolare Ω_1, corrispondente a $C = D = 0$) sia il disco piccolo che quello grande hanno un moto oscillatorio. Nel secondo (di frequenza angolare nulla) i due dischi ruotano con velocità angolare costante.