PROBLEMA 7.4

Equilibrio di un cilindro immerso in un liquido ⋆⋆⋆

Un cilindro di densità costante ρ, raggio di base R e altezza h galleggia in un liquido di densità $\rho_L > \rho$, con l'asse in direzione verticale. Studiare la stabilità della posizione di equilibrio.

Soluzione

Poniamo inizialmente un sistema di riferimento con l'origine O sull'asse del cilindro a una distanza $\overline{OP} = d$ dalla base inferiore, come mostrato in Figura 7.3. In tale sistema di riferimento il centro di massa sarà in $x = y = 0$ e $z = h/2 - d$. Immaginiamo adesso di tagliare il cilindro con un piano passante per O e inclinato di un angolo θ rispetto all'orizzontale. Sempre facendo riferimento alla Figura 7.3, il centro di massa della parte del cilindro al di sotto del piano, che rappresenterà la parte immersa nel fluido, si troverà in $x_G(\theta)$, $y_G = 0$, $z_G(\theta)$.

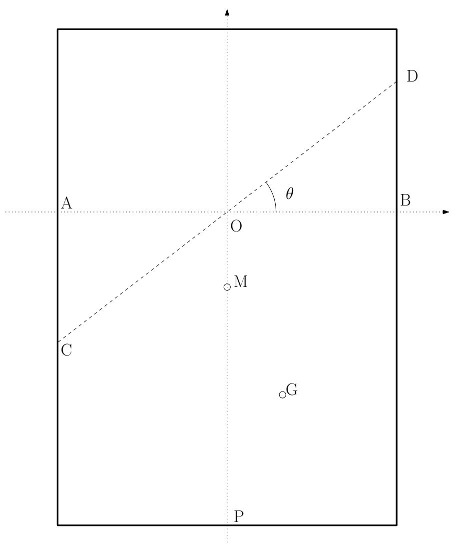

Figura 7.3.: Il cilindro del problema. L'origine del sistema di coordinate (asse verticale z, asse orizzontale x) è scelto in modo da avere $\overline{OP} = d$.

Notiamo che il volume totale di tale parte non dipende da θ e vale

$$V_I = \pi R^2 d$$

All'equilibrio, con il cilindro in posizione verticale, la spinta di Archimede deve eguagliare la forza peso, quindi $g\rho_L V_I = g\rho V$, cioè

$$\rho_L \pi R^2 d g = \rho \pi R^2 h g$$

e quindi

$$d = \frac{\rho}{\rho_L} h$$

Si verifica facilmente che il sistema è stabile verticalmente. Se l'altezza della parte immersa vale $d - x$ infatti si ha una forza di richiamo verticale

$$F(x) = -\rho_L \pi R^2 g x$$

Vediamo sotto quale condizione il sistema è stabile sotto rotazioni. Ruotando di un angolo θ il cilindro attorno ad un asse orizzontale passante per O abbiamo per le coordinate di un punto generico

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta - z\sin\theta \\ z' &= x\sin\theta + z\cos\theta \end{aligned}$$

ossia, usando i risultati precedenti,

$$\begin{aligned} x'_M &= \left(\frac{h}{2} - d\right)\sin\theta \\ x'_G &= x_G(-\theta)\cos\theta - z_G(-\theta)\sin\theta \end{aligned}$$

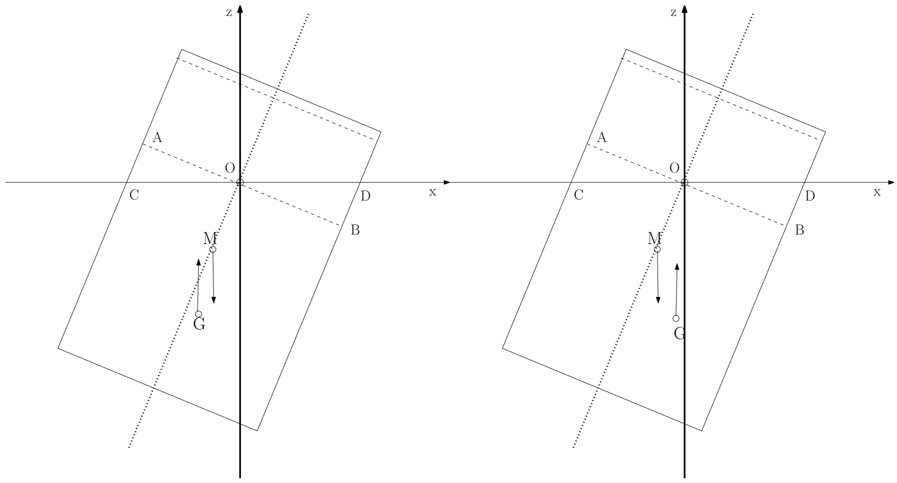

Figura 7.4.: Due possibili posizioni del centro di massa M del cilindro e del centro di galleggiamento G. La situazione a sinistra corrisponde alla instabilità, quella a destra alla stabilità.

Quindi sul cilindro agisce il momento

$$M = \rho g V \left(x'_G - x'_M\right)$$

Utilizzando le espressioni esplicite per x_G e z_G, calcolate alla fine dell'esercizio, otteniamo per piccoli angoli,

$$\begin{aligned} x'_M &= \left(\frac{h}{2} - d\right)\theta \\ x'_G &= \left(-\frac{d}{2} + \frac{R^2}{8\pi d}\right)\theta \end{aligned}$$

e il momento delle forze vale esplicitamente

$$M = \frac{1}{2}\rho g V \left(h - d - \frac{R^2}{4\pi d}\right)\theta$$

Per avere stabilità il momento deve tendere a riportare il cilindro nella posizione di equilibrio, quindi

$$\left(h - d - \frac{R^2}{4\pi d}\right) < 0$$

cioè

$$4\pi\frac{\rho}{\rho_L}\left(1 - \frac{\rho}{\rho_L}\right) < \frac{R^2}{h^2}$$

Si avrà stabilità quindi quando il rapporto R/h è sufficientemente grande.

Calcolo del centro di massa della parte immersa del cilindro.

Considerando il cilindro in Figura 7.3, troviamo il centro di massa G della parte del cilindro al di sotto di un piano passante dal punto O e inclinato di un angolo θ (passante per C e D in figura). Abbiamo

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{\pi R^2 d}\int x dV \\ z_G &= \frac{1}{\pi R^2 d}\int z dV \end{aligned}$$

che possiamo scrivere esplicitamente in coordinate cilindriche. Per x_G si ottiene, tenendo conto che $x = r\cos\phi$ e che la faccia superiore ha equazione $z = x\tan\theta$

$$\begin{aligned}
x_G &= \frac{1}{\pi R^2 d}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R rdr \int_{-d}^{r\cos\phi\tan\theta} dz\, r\cos\phi \\
&= \frac{1}{\pi R^2 d}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R r^2 dr \cos\phi\,(r\cos\phi\tan\theta + d) \\
&= \frac{1}{\pi R^2 d}\int_0^R \frac{1}{2} r^3 dr \tan\theta \\
&= \frac{1}{8}\frac{R^4}{\pi R^2 d}\tan\theta \\
&= \frac{R^2}{8\pi d}\tan\theta
\end{aligned}$$

Per quanto riguarda z_G

$$\begin{aligned}
z_G &= \frac{1}{\pi R^2 d}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R rdr \int_{-d}^{r\cos\phi\tan\theta} dz\, z \\
&= \frac{1}{\pi R^2 d}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R rdr \frac{1}{2}\left(r^2\cos^2\phi\tan^2\theta - d^2\right) \\
&= \frac{1}{\pi R^2 d}\int_0^R dr \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} r^3\tan^2\theta - 2\pi d^2 r\right) \\
&= \frac{1}{\pi R^2 d}\left(\frac{R^2}{8\pi d^2}\tan^2\theta - 1\right)
\end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned}
x'_M &= \left(\frac{h}{2} - d\right)\sin\theta \\
x'_G &= \frac{R^2}{8\pi d}\sin\theta + \frac{d}{2}\left(\frac{R^2}{8\pi d^2}\tan^2\theta - 1\right)\sin\theta
\end{aligned}$$