PROBLEMA 7.9

Diavoletto di Cartesio ⋆⋆

Il recipiente cilindrico in Figura 7.8 (sezione S) non permette passaggio di calore. La sua base superiore può scorrere liberamente. All'interno del cilindro si trova una mole di esafloruro di zolfo (SF_6, massa molecolare $\mu = 146.6\, g/mol$), e una piccola sfera di un materiale di densità media ρ e capacità termica trascurabile.

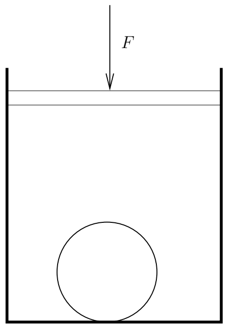

Figura 7.8.: La sfera immersa nell'esafloruro di zolfo contenuto nel recipiente.

Inizialmente si osserva che la sfera é appoggiata sul fondo, e l'esafluoruro di zolfo, che si assume si comporti come un gas perfetto, si trova a valori dati $T = T_0$ e $P = P_0$ di pressione e temperatura.

1. Cosa si puó dire di ρ? Di quanto si deve abbassare il pistone per fare in modo che la sfera si sollevi dal fondo?
2. Se tale abbassamento avviene aumentando molto lentamente la forza esterna F, quanto vale la variazione totale ΔF di quest'ultima? Quanto vale ΔF se la variazione è invece improvvisa?
3. Nei due casi precedenti, calcolare la variazione di entropia del sistema.

Soluzione[2]

Osserviamo preliminarmente che la temperatura del gas sarà ovunque la stessa, dato che le diverse parti del sistema sono libere di scambiarsi calore. Al contrario, la pressione dipenderà dalla coordinata verticale, che chiameremo z. Possiamo scrivere per la legge dei gas perfetti

$$\mu P(z) = \rho(z) RT$$

ed inoltre

$$dP = -\rho g dz$$

[2] Primo esercizio compitino 30 maggio 2007

da cui

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{\mu g}{RT}P$$

che si può integrare ottenendo

$$P(z) = P(0)e^{-\frac{\mu g}{RT}z}.$$

Analogamente per la densità avremo

$$\rho_G(z) = \rho_G(0)e^{-\frac{\mu g}{RT}z}$$

che possiamo esprimere alternativamente in funzione del volume e della massa totale. Da

$$m = \mu = S\rho_G(0)\int_0^h e^{-\frac{\mu g}{RT}z}dz = S\rho_G(0)\frac{RT}{\mu g}\left(1 - e^{-\frac{\mu g h}{RT}}\right)$$

otteniamo

$$\rho_G(z) = \frac{\mu^2 g}{RTS}\left(1 - e^{-\frac{\mu g h}{RT}}\right)^{-1} e^{-\frac{\mu g}{RT}z}.$$

In prima approssimazione potremo trascurare ovunque la variazione di pressione e densità con l'altezza, salvo tenerne implicitamente conto per il calcolo della spinta di Archimede.

I.1

Alla sfera sono applicate due forze: quella di gravità e la spinta di Archimede, risultante dall'azione complessiva della pressione del gas. Per calcolare quest'ultima basta valutare la forza peso del gas che occuperebbe il volume della sfera, cioè

$$\vec{F}_A = F_A\hat{z} = gV_s\rho_G\hat{z}.$$

Se la sfera resta sul fondo avremo chiaramente

$$\rho > \rho_G = \frac{\mu P_0}{RT_0}.$$

Per sollevare la sfera si deve comprimere il gas fino ad avere

$$\rho'_G = \rho_G\frac{V_0}{V'} = \rho$$

da cui segue

$$\Delta h = \frac{1}{S}\left(V' - V_0\right) = \frac{V_0}{S}\left(\frac{\rho_G}{\rho} - 1\right) = \frac{RT_0}{SP_0}\left(\frac{\rho_G}{\rho} - 1\right) < 0.$$

I.2

Aumentando molto lentamente la forza esterna abbiamo una trasformazione adiabatica reversibile. In questo caso pressione e volume sono legati da

$$PV^{\gamma} = P_0 V_0^{\gamma}$$

dove $\gamma = c_p/c_v$e quindi la pressione finale vale

$$P = P_0 \left[\frac{V_0}{V_0 + V_0 \left(\frac{\rho_G}{\rho} - 1 \right)} \right]^{\gamma} = \left(\frac{\rho}{\rho_G} \right)^{\gamma} P_0 \,.$$

Da questo segue che

$$\Delta F_{rev} = P_0 S \left[\left(\frac{\rho}{\rho_G} \right)^{\gamma} - 1 \right] .$$

Se la variazione è improvvisa, sul gas viene fatto un lavoro $W = -(F + \Delta F)\, \Delta h$ e quindi la sua energia interna aumenterà della stessa quantità. Da questo segue che

$$c_v \Delta T = -(F + \Delta F)\, \Delta h$$

cioè

$$PV] = -(F + \Delta F) \frac{\Delta V_0}{S}$$

e quindi

$$(F + \Delta F) V_0 \left[\frac{c_v}{R} \frac{\rho_G}{\rho} + \left(\frac{\rho_G}{\rho} - 1 \right) \right] = S c_v T_0$$

ossia

$$\Delta F_{irr} = P_0 S \frac{\gamma \left(1 - \frac{\rho_G}{\rho} \right)}{1 - \gamma \left(1 - \frac{\rho_G}{\rho} \right)} .$$

Da notare che $\Delta F_{rev} \geq \Delta F_{irr}$, e che se le densità iniziali sono molto vicine

$$\begin{aligned} \Delta F_{rev} &= P_0 S \gamma \left(1 - \frac{\rho_G}{\rho} \right) + O \left[\left(1 - \frac{\rho_G}{\rho} \right)^2 \right] \\ \Delta F_{irr} &= P_0 S \gamma \left(1 - \frac{\rho_G}{\rho} \right) + O \left[\left(1 - \frac{\rho_G}{\rho} \right)^2 \right] . \end{aligned}$$

La disuguaglianza si comprende tenendo conto che a parità di variazione di volume il lavoro fatto sul sistema è sempre maggiore nel caso irreversibile, e quindi la pressione finale sarà pure maggiore (il volume è lo stesso). I valori di ΔF sono uguali al primo ordine nella differenza tra densità perchè quando $\rho_G \simeq \rho$ le trasformazioni sono piccole, e possono essere considerate al limite entrambe reversibili.