PROBLEMA 8.10

Temperatura di un conduttura

Una conduttura cilindrica di lunghezza infinita ha raggio interno r_1 e raggio esterno $r_2 = r_1$, e conducibilità termica η. Se la sua superficie interna $r = r_1$ è mantenuta alla temperatura T_1 e quella esterna $r = r_2$ alla temperatura $T_2 < T_1$, calcolare in condizioni stazionarie la temperatura $T(r)$ e la potenza W per unità di lunghezza che deve essere generata per rimanere a regime.

Soluzione

Data la simmetria del problema il calore si propaga radialmente. Possiamo quindi scrivere la densità di corrente di calore come

$$J = -\eta \frac{dT}{dr}$$

Inoltre in condizioni stazionarie il calore che attraversa in una unità di tempo una superficie cilindrica con asse coincidente con quello della conduttura non deve dipendere da r. Quindi considerando un tratto di lunghezza ℓ dovrà essere

$$2\pi r J \ell = K$$

Mettendo insieme le due equazioni precedenti troviamo

$$\frac{K}{2\pi r \ell} = -\eta \frac{dT}{dr}$$

ed integrando

$$T(r) = -\frac{K}{2\pi\eta\ell} \log r + C$$

Fissiamo le costanti K imponendo le condizioni al contorno:T_

$$\begin{aligned} T_1 &= -\frac{K}{2\pi\eta\ell} \log r_1 + C \\ T_2 &= -\frac{K}{2\pi\eta\ell} \log r_2 + C \end{aligned}$$

da cui

$$T_2 - T_1 = \frac{K}{2\pi\eta\ell} \log\left(\frac{r_1}{r_2}\right)$$

e quindi

$$K = \frac{2\pi\eta\ell\,(T_1 - T_2)}{\log\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

e

$$C = T_1 + \frac{\log r_1}{\log\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}\left(T_1 - T_2\right)$$

Otteniamo infine

$$T(r) = T_1 + \frac{\log\left(\frac{r}{r_1}\right)}{\log\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}\left(T_2 - T_1\right)$$

Il calore che attraversa trasversalmente la conduttura per unità di lunghezza è K/ℓ, ed è anche la potenza che deve essere generata, sempre per unità di lunghezza, per mantenere le condizioni stazionarie. Quindi

$$W = \frac{2\pi\eta\left(T_1 - T_2\right)}{\log\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$