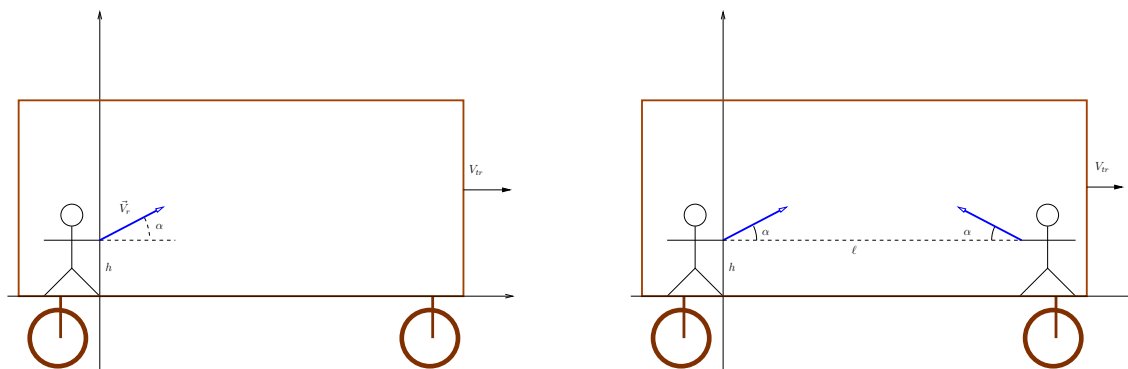


Dipartimento di Fisica - Fisica I a

Compitino 4 novembre 2009

Esercizio 1 (15 punti)



All'interno di un vagone ferroviario che si muove con velocità costante V_{tr} viene lanciato un oggetto la cui velocità iniziale relativa al vagone forma un angolo α rispetto all'orizzontale ed ha modulo V_r . Al momento del lancio l'oggetto si trova ad una altezza h rispetto al pavimento del vagone (in figura, a sinistra).

1. Determinate dopo quanto tempo l'oggetto arriva sul pavimento, in funzione di \vec{V}_r .
2. Fissate adesso il sistema di riferimento \mathcal{R} di un osservatore esterno, scegliendolo in modo che all'istante del lancio l'origine sia sul pavimento del treno e sulla verticale dell'oggetto. Calcolate la gittata osservata in \mathcal{R} .
3. Supponete adesso che vengano lanciati due oggetti dai due estremi del vagone (di lunghezza ℓ), sempre da una altezza iniziale h . La velocità dei due oggetti relativa al vagone ha la stessa componente verticale ma componente orizzontale opposta (in figura, a destra). Sotto quali condizioni, e dopo quanto tempo i due oggetti si scontrano?

Soluzione

Problema 1

La legge oraria per il moto in direzione verticale si scrive

$$y(t) = h + V_r \sin \alpha t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (1)$$

e il tempo t_V a cui l'oggetto arriva sul pavimento si determina ponendo $y(t_V) = 0$:

$$t_V^2 - \frac{2V_r \sin \alpha}{g}t_V - \frac{2h}{g} = 0 \quad (2)$$

Risolvendo si ottiene

$$t_V = \frac{V_r \sin \alpha}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{V_r \sin \alpha}{g}\right)^2 + \frac{2h}{g}} \quad (3)$$

dove la soluzione $t_V < 0$ deve essere scartata. Quindi

$$t_V = \frac{V_r \sin \alpha}{g} + \sqrt{\left(\frac{V_r \sin \alpha}{g}\right)^2 + \frac{2h}{g}} \quad (4)$$

Problema 2

Nel sistema scelto le leggi orarie sono date da

$$x(t) = (V_r \cos \alpha + V_{tr})t \quad (5)$$

$$y(t) = h + V_r \sin \alpha t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (6)$$

La prima equazione descrive un moto uniforme con velocità data dalla somma della velocità dell'oggetto rispetto al treno e di quella di quest'ultimo. La seconda un moto uniformemente accelerato (l'accelerazione è la stessa nel sistema di riferimento solidale al vagone e in \mathcal{R} , come anche la velocità verticale).

Considerando la seconda equazione si vede che il tempo di volo è quello determinato all'esercizio precedente. Sostituendo quest'ultimo nella prima equazione troviamo la gittata

$$d = x(t_V) = (V_r \cos \alpha + V_{tr}) \frac{V_r \sin \alpha}{g} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{V_r^2 \sin^2 \alpha}} \right] \quad (7)$$

Problema 3

L'istante a cui i due oggetti si scontrano non dipende dal sistema di riferimento. Ponendosi nel sistema del vagone abbiamo per il primo oggetto

$$x_1(t) = V_r \cos \alpha t \quad (8)$$

$$y_1(t) = h + V_r \sin \alpha t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (9)$$

e per il secondo

$$x_2(t) = \ell - V_r \cos \alpha t \quad (10)$$

$$y_2(t) = h + V_r \sin \alpha t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (11)$$

Notare che è sempre $y_1(t) = y_2(t)$. Per determinare l'istante dello scontro è sufficiente porre $x_1(t_S) = x_2(t_S)$, cioè

$$t_S = \frac{\ell}{2V_r \cos \alpha} \quad (12)$$

Una prima condizione da imporre è $t_S > 0$, che significa $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$. Inoltre lo scontro deve avvenire al di sopra del pavimento, quindi $y_{1,2}(t_S) > 0$. Questo significa

$$h + \frac{\ell \sin \alpha}{2 \cos \alpha} - \frac{g\ell^2}{8V_r^2 \cos^2 \alpha} > 0 \quad (13)$$

che si può anche scrivere

$$\tan^2 \alpha - \frac{4V_r^2}{g\ell} \tan \alpha - \left(\frac{8hV_r^2}{g\ell^2} - 1 \right) < 0 \quad (14)$$

ed ha per soluzione

$$\frac{2V_r^2}{g\ell} - \sqrt{\left(\frac{2V_r^2}{g\ell} \right)^2 + \left(\frac{8hV_r^2}{g\ell^2} - 1 \right)} < \tan \alpha < \frac{2V_r^2}{g\ell} + \sqrt{\left(\frac{2V_r^2}{g\ell} \right)^2 + \left(\frac{8hV_r^2}{g\ell^2} - 1 \right)} \quad (15)$$

Esercizio 2 (15 punti)

Un punto materiale si muove nel piano con una legge oraria data, in coordinate cartesiane, da

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \cos \theta(t) \\ B \sin \theta(t) \end{pmatrix} \quad (16)$$

dove A , B sono due costanti e $\theta(t)$ una funzione incognita del tempo, crescente e illimitata superiormente.

1. Determinare la traiettoria del punto materiale.
2. Calcolare il raggio di curvatura della traiettoria, in funzione di θ .
3. Ponendo $\theta(t) = \omega t + \theta_0$, con ω e θ_0 costanti, mostrare che il vettore accelerazione è proporzionale al vettore posizione, $\vec{a}(t) = K\vec{r}(t)$, e determinare la costante K .

Soluzione

Problema 1

Elevando al quadrato $x(t)$ e $y(t)$ otteniamo

$$\frac{x^2}{A^2} = \cos^2 \theta \quad (17)$$

$$\frac{y^2}{B^2} = \sin^2 \theta \quad (18)$$

e sommando membro a membro abbiamo

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \quad (19)$$

che è l'equazione di un'ellisse. Dato che θ è crescente e illimitata superiormente il punto materiale la percorrerà integralmente e ripetutamente.

Problema 2

Possiamo calcolare la velocità

$$\vec{v} = \dot{\theta} \begin{pmatrix} -A \sin \theta \\ B \cos \theta \end{pmatrix} \quad (20)$$

l'accelerazione

$$\vec{a} = \dot{\theta}^2 \begin{pmatrix} -A \cos \theta \\ -B \sin \theta \end{pmatrix} + \ddot{\theta} \begin{pmatrix} -A \sin \theta \\ B \cos \theta \end{pmatrix} \quad (21)$$

il versore tangente alla traiettoria

$$\hat{\tau} = \frac{1}{\sqrt{A^2 \sin^2 \theta + B^2 \cos^2 \theta}} \begin{pmatrix} -A \sin \theta \\ B \cos \theta \end{pmatrix} \quad (22)$$

e quello normale

$$\hat{n} = -\frac{1}{\sqrt{A^2 \sin^2 \theta + B^2 \cos^2 \theta}} \begin{pmatrix} B \cos \theta \\ A \sin \theta \end{pmatrix} \quad (23)$$

Abbiamo quindi per il raggio di curvatura

$$\frac{v^2}{\rho} = \vec{a} \cdot \hat{n} = \frac{AB\dot{\theta}^2}{\sqrt{A^2 \sin^2 \theta + B^2 \cos^2 \theta}} \quad (24)$$

ossia, tenendo conto che $v^2 = \dot{\theta}^2 (A^2 \sin^2 \theta + B^2 \cos^2 \theta)$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{AB}{(A^2 \sin^2 \theta + B^2 \cos^2 \theta)^{3/2}} \quad (25)$$

Notare che se $A = B = R$ la traiettoria si riduce a una circonferenza, e $\rho = R$.

Problema 3

Abbiamo

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} A \cos(\omega t + \theta_0) \\ B \sin(\omega t + \theta_0) \end{pmatrix} \quad (26)$$

e derivando ripetutamente rispetto al tempo

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -A\omega \sin(\omega t + \theta_0) \\ B\omega \cos(\omega t + \theta_0) \end{pmatrix} \quad (27)$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -A\omega^2 \cos(\omega t + \theta_0) \\ -B\omega^2 \sin(\omega t + \theta_0) \end{pmatrix} \quad (28)$$

Quindi $\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}$, e $K = -\omega^2$.