Analisi dimensionale e unità di misura

9 ottobre 2009

1 Conversioni di unità di misura

Esercizio

Definendo il metro come $1/(40\times10^6)$ *del meridiano terrestre, e il miglio marino (abbreviato* nmi*) come l'arco del meridiano terrestre corrispondente a* $1'$*, esprimere quest'ultimo in metri.*

Soluzione

Detto $R_\oplus$ il raggio terrestre abbiamo

$$1\,\mathrm{m} = \frac{2\pi R_\oplus}{40\times10^6} \tag{1}$$

ma anche

$$1\,\mathrm{nmi} = 2\pi R_\oplus \frac{1'}{360^\circ} = 2\pi R_\oplus \frac{1}{360\times60} \tag{2}$$

e quindi confrontando

$$1\,\mathrm{nmi} = \frac{40\times10^6}{360\times60}\,\mathrm{m} \simeq 1852\,\mathrm{m} \tag{3}$$

Esercizio

Il nodo è un'unità di misura della velocità, corrispondente a un miglio marino all'ora. Esprimerlo in $\mathrm{m/s}$ *e in* $\mathrm{km/h}$*.*

Soluzione

Abbiamo

$$1\,\mathrm{nodo} = \frac{1\,\mathrm{nmi}}{1\,\mathrm{h}} = \frac{1852\,\mathrm{m}}{3600\,\mathrm{s}} = 0.51\,\mathrm{m/s} \tag{4}$$

e anche

$$1\,\mathrm{nodo} = \frac{1\,\mathrm{nmi}}{1\,\mathrm{h}} = \frac{1.852\,\mathrm{km}}{1\,\mathrm{h}} = 1.85\,\mathrm{km/h} \tag{5}$$

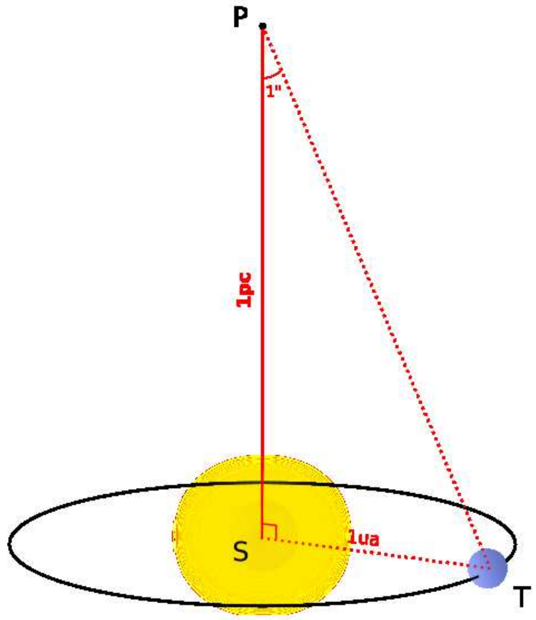

Figura 1: Definizione del parsec.

Esercizio

*Il parsec (*pc*) è definito come la distanza alla quale si trova una stella che subisce vista dalla terra una parallasse annuale di un secondo d'arco. Calcolare il valore di un parsec in metri, sapendo che la distanza media della terra dal sole (la cosiddetta unità astronomica,* UA*) vale* $1\,\mathrm{UA} = 1.496 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$.

Soluzione

Facendo riferimento alla Figura 1 abbiamo

$$1\,\mathrm{UA} = 1\,\mathrm{pc}\tan\left(2\pi\frac{1''}{360^\circ}\right) \tag{6}$$

ossia (notare che $\tan x \simeq x$ se $|x| \ll 1$)

$$1\,\mathrm{pc} = \frac{1.496\times 10^{11}\,\mathrm{m}}{\tan\left(\frac{2\pi}{360\times 60\times 60}\right)} \simeq \frac{1.496\times 10^{11}\,\mathrm{m}}{\tan\left(4.8\times 10^{-6}\right)} \simeq \frac{1.496\times 10^{11}\,\mathrm{m}}{4.8\times 10^{-6}} \simeq 3.1\times 10^{16}\,\mathrm{m} \tag{7}$$

Esercizio

Esprimere l'inverso della costante di Hubble, data da $H_0 = 65\,\mathrm{km/s/Mpc}$*, in secondi.*

Soluzione

Abbiamo

$$H_0^{-1} = \frac{1}{65}\frac{\mathrm{Mpc\,s}}{km} = \frac{10^6 \times 3.1 \times 10^{16}\,\mathrm{m\,s}}{65 \times 10^3\,\mathrm{m}} \simeq 4.8 \times 10^{17}\,\mathrm{s} \tag{8}$$

2 Semplici applicazioni dell'analisi dimensionale

Esercizio

Un corpo di massa m *viene lasciato cadere da un'altezza* h*. Cosa si può dire sul tempo di caduta, sulla base della sola analisi dimensionale?*

Soluzione

I parametri in gioco sono m, h e l'accelerazione di gravità g. Le relative dimensioni sono

$$[m] = M^1 L^0 T^0 \tag{9}$$
$$[h] = M^0 L^1 T^0 \tag{10}$$
$$[g] = M^0 L^1 T^{-2} \tag{11}$$

Consideriamo le combinazioni dei parametri del tipo $m^\alpha h^\beta g^\gamma$ con le dimensioni di un tempo. Deve essere

$$M^0 L^0 T^1 = [m^\alpha h^\beta g^\gamma] = M^\alpha L^{\beta+\gamma} T^{-2\gamma} \tag{12}$$

da cui si ottengono le condizioni

$$\alpha = 0 \tag{13}$$
$$\beta + \gamma = 0 \tag{14}$$
$$-2\gamma = 1 \tag{15}$$

che sono soddisfatte solo per $\alpha = 0$, $\beta = 1/2$, $\gamma = -1/2$. Il tempo di caduta sarà quindi dato da

$$\tau = k\sqrt{\frac{h}{g}} \tag{16}$$

dove k è una costante numerica adimensionale, non calcolabile sulla base della sola analisi dimensionale. Usando la legge del moto accelerato $h = \frac{1}{2}gt^2$ si conferma il risultato ottenuto, e si trova $k = \sqrt{2}$.

Esercizio

Lo stesso corpo di massa m viene lanciato verso l'alto con velocità v. Cosa si può dire sull'altezza massima raggiunta, sulla base dell'analisi dimensionale?

Soluzione

I parametri in gioco sono m, g e v. Dobbiamo costruire con essi una grandezza con le dimensioni di una lunghezza. Quindi

$$[m^\alpha v^\beta g^\gamma] = M^\alpha L^{\beta+\gamma} T^{-\beta-2\gamma} = M^0 L^1 T^0 \tag{17}$$

e l'unica possibile soluzione è $\alpha = 0$, $\beta = 2$ e $\gamma = -1$, che corrisponde a

$$h_{MAX} = k\frac{v^2}{g} \tag{18}$$

Esercizio

Analizzare dimensionalmente il problema del periodo di oscillazione di un pendolo inizialmente inclinato di un angolo θ_0.

Soluzione

I parametri in gioco sono la massa del pendolo m, la sua lunghezza ℓ, l'accelerazione di gravità g e l'inclinazione iniziale θ_0. Vogliamo con essi costruire una grandezza delle dimensioni di un tempo, cioè

$$[m^\alpha \ell^\beta g^\gamma \theta_0^\delta] = M^\alpha L^{\beta+\gamma} T^{-2\gamma} = M^0 L^0 T^1 \tag{19}$$

Il sistema precedente fissa $\alpha = 0$, $\beta = -\gamma = 1/2$. Il parametro δ può essere scelto arbitrariamente: questo corrisponde al fatto che θ_0 è adimensionale. La soluzione per il periodo sarà quindi della forma

$$T = f(\theta_0)\sqrt{\frac{\ell}{g}} \tag{20}$$

dove f è una funzione arbitraria dell'angolo iniziale. Questa funzione esprime una possibile dipendenza (che in effetti esiste) del periodo di oscillazione di un pendolo dalla sua ampiezza. Il principio di isocronia delle oscillazioni, valido approssimativamente per piccole ampiezze, ci dice che

$$\lim_{\theta_0 \to 0} f(\theta_0) = C \tag{21}$$

dove C è una costante strettamente maggiore di zero. Risolvendo le equazioni del moto si trova che la formula è corretta, e che $C = \frac{1}{2\pi}$.

Esercizio

Un paracadutista si lancia nel vuoto, e risente di una forza di attrito viscoso proporzionale alla velocità,

$$F = -\gamma v \tag{22}$$

Sulla base di considerazioni dimensionali si determini il tempo di caduta dall'altezza iniziale h, e discutere il limite di attrito trascurabile.

Soluzione

Vogliamo determinare una grandezza delle dimensioni di un tempo dai parametri supposti rilevanti, cioè m, h, γ e g. Le dimensioni di γ sono anzitutto

$$[\gamma] = \frac{[F]}{[v]} = M^1 L^0 T^{-1} \tag{23}$$

e abbiamo

$$[m^{c_1} h^{c_2} \gamma^{c_3} g^{c_4}] = M^{c_1+c_3} L^{c_2+c_4} T^{-c_3-2c_4} \tag{24}$$

quindi deve essere

$$\begin{aligned} c_1 + c_3 &= 0 & (25)\\ c_2 + c_4 &= 0 & (26)\\ -c_3 - 2c_4 &= 1 & (27) \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} c_1 &= 2c_4 + 1 & (28)\\ c_2 &= -c_4 & (29)\\ c_3 &= -2c_4 - 1 & (30) \end{aligned}$$

La conclusione è che la combinazione

$$m^{2c_4+1} h^{-c_4} \gamma^{-2c_4-1} g^{c_4} = \frac{m}{\gamma} \left(\frac{m^2 g}{\gamma^2 h} \right)^{c_4} \tag{31}$$

ha le dimensioni richieste per un valore arbitrario di c_4. É chiaro inoltre che la combinazione

$$\Pi_1 = \frac{gm^2}{h\gamma^2} \tag{32}$$

è adimensionale, quindi potremo scrivere per il tempo di caduta τ

$$\tau = \frac{m}{\gamma} F \left(\frac{m^2 g}{\gamma^2 h} \right) \tag{33}$$

dove F è una funzione arbitraria. Da un esercizio svolto precedentemente sappiamo che nel limite di attrito trascurabile deve essere

$$\lim_{\gamma\to 0}\frac{m}{\gamma}F\left(\frac{m^2 g}{\gamma^2 h}\right)=k\sqrt{\frac{h}{g}} \tag{34}$$

questo significa che per grandi valori di x deve essere

$$F(x)\sim\frac{k}{\sqrt{x}} \tag{35}$$

Esercizio

Si osserva che un paracadutista in caduta raggiunge una velocità limite costante. Determinare tale velocità limite sulla base di considerazioni dimensionali.

Soluzione

Possiamo ripetere le considerazioni fatte all'esercizio precedente, cercando questa volta una grandezza delle dimensioni di una velocità. Da

$$[m^{c_1}h^{c_2}\gamma^{c_3}g^{c_4}]=M^{c_1+c_3}L^{c_2+c_4}T^{-c_3-2c_4} \tag{36}$$

otteniamo stavolta

$$\begin{aligned} c_1+c_3 &= 0 &(37)\\ c_2+c_4 &= 1 &(38)\\ -c_3-2c_4 &= -1 &(39) \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} c_1 &= 1-2c_2 &(40)\\ c_4 &= 1-c_2 &(41)\\ c_3 &= 2c_2-1 &(42) \end{aligned}$$

Quindi per qualsiasi valore di c_2 la quantità

$$\frac{mg}{\gamma}\left(\frac{h\gamma^2}{gm^2}\right)^{c_2} \tag{43}$$

ha le dimensioni cercate. D'altra parte la velocità limite non può dipendere da h per definizione, e quindi $c_2=0$. In conclusione sarà

$$v_{LIM}=k\frac{mg}{\gamma} \tag{44}$$

dove k è la solita costante adimensionale indeterminata. Se ci avesse interessato la velocità con cui il paracadutista arrivava al suolo avremmo scritto

$$v_{FIN} = \frac{mg}{\gamma} F\left(\frac{h\gamma^2}{gm^2}\right) \tag{45}$$

con F funzione arbitraria, e dall'esistenza di una velocità limite avremmo potuto concludere che

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = C \tag{46}$$

con $C > 0$.