Cinematica unidimensionale

9 ottobre 2009

1 Moto rettilineo uniforme

1.1 Automobili e api

Due automobili, inizialmente separate da una distanza $L_0 = 1600$ m, cominciano a muoversi l'una verso l'altra di moto rettilineo uniforme con velocità rispettivamente $V_1 = 30\,\mathrm{m/s}$ e $V_2 = -50\,\mathrm{m/s}$.

Esercizio

Dopo quanto tempo le automobili si incontreranno?

Soluzione

Risolviamo il problema scrivendo le leggi orarie delle due automobili, valide per $t > 0$. Abbiamo la coppia di equazioni

$$s_1 = V_1 t \quad (1)$$

$$s_2 = L_0 + V_2 t \quad (2)$$

che forniscono, in funzione del tempo, la posizione delle due automobili. All'istante t^* dell'incontro deve essere $s_1 = s_2$, cioè

$$V_1 t^* = L_0 + V_2 t^* \quad (3)$$

che risolte per il tempo da

$$t^* = \frac{L_0}{V_1 - V_2} = \frac{1600\,\mathrm{m/s}}{30\,\mathrm{m/s} - (-50\,\mathrm{m/s})} = 20\,\mathrm{s} \quad (4)$$

La posizione delle macchine a questo istante sarà

$$s_1 = s_2 = \frac{V_1}{V_1 - V_2} L_0 \quad (5)$$

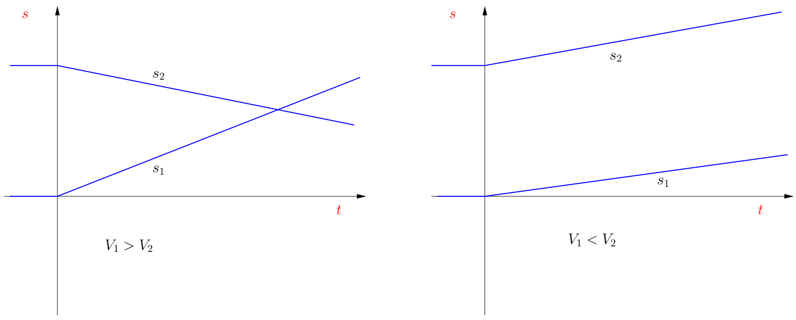

Figura 1: Rappresentazione grafica del moto delle due automobili, nei casi $V_1 > V_2$ e $V_1 < V_2$.

Esercizio

Il problema ammette soluzioni accettabili per qualsiasi coppia di valori V_1, V_2?

Soluzione

Dalla formula ottenuta per il tempo di incontro t^* segue che per avere $t^* > 0$ deve essere $V_1 > V_2$. Se $V_1 < V_2$ la soluzione $t^* < 0$ deve essere scartata perchè le leggi orarie utilizzate sono valide solo per $t > 0$. La soluzione rappresenta l'ipotetico istante di incontro delle due automobili se il loro moto fosse sempre stato rettilineo uniforme. Infine se $V_1 = V_2$ non esistono soluzioni, accettabili o meno. Questo corrisponde al fatto che se le due automobili hanno la stessa velocità non si incontrano mai.

Esercizio

Rappresentare graficamente il moto delle due automobili in un piano cartesiano, dove le ascisse corrispondono al tempo e le ordinate alla posizione. Dare la rappresentazione anche per $t < 0$

Soluzione

Dalle leggi orarie segue che i due moti sono rappresentati, per $t > 0$, da due rette come in Figura 1. Per $t < 0$ si hanno le due rette orizzontali

$$s_1 = 0 \tag{6}$$

$$s_2 = L_0 \tag{7}$$

Il punto di intersezione determina il tempo e la posizione alla quale avviene l'incontro. Notare che in questa rappresentazione la velocità corrisponde al coefficiente angolare della retta. Se $V_1 \leq V_2$ non si ha nessuna intersezione.

Nelle condizioni del problema precedente un'ape parte a $t = 0$ dalla prima automobile, dirigendosi con velocità $V_A = 60\,\mathrm{m/s}$ verso la seconda. Arrivata a questa cambia direzione e torna indietro fino alla prima, e così via.

Esercizio

Al momento dell'incontro tra le automobili quanto spazio avrà percorso l'ape?

Soluzione

Calcoliamo prima di tutto lo spazio $\ell^{(1)}$ percorso dall'ape nei primi due "viaggi" (dall'automobile 1 alla 2 e viceversa). Possiamo utilizzare le Equazioni (5) e (4) (l'ape sostituisce la prima macchina) per calcolare la lunghezza e la durata del primo viaggio:

$$\Delta t_{\text{andata}} = \frac{L_0}{V_A - V_2} \tag{8}$$

$$\ell_{\text{andata}} = \frac{V_A L_0}{V_A - V_2} \tag{9}$$

La distanza tra i vagoni è diventata adesso

$$\begin{aligned} L_{\text{andata}} &= s_2(t_{\text{andata}}) - s_1(t_{\text{andata}}) \\ &= L_0 + V_2 \Delta t_{\text{andata}} - V_1 \Delta t_{\text{andata}} \\ &= L_0 - \frac{V_1 - V_2}{V_A - V_2} L_0 \\ &= \frac{V_A - V_1}{V_A - V_2} L_0 \end{aligned} \tag{10}$$

e possiamo calcolare la durata e la lunghezza del viaggio di ritorno dalle solite equazioni con le sostituzioni

$$L_0 \rightarrow L_{\text{andata}} \tag{11}$$

$$V_2 \rightarrow -V_A \tag{12}$$

da cui

$$\Delta t_{\text{ritorno}} = \frac{L_{\text{andata}}}{V_1 + V_A} = \frac{V_A - V_1}{V_A - V_2} \frac{L_0}{V_1 + V_A} \tag{13}$$

$$\ell_{\text{ritorno}} = \frac{V_A - V_1}{V_A - V_2} \frac{V_A L_0}{V_1 + V_A} \tag{14}$$

Lo spazio percorso fino a questo momento è

$$\ell^{(1)} = \ell_{\text{andata}} + \ell_{\text{ritorno}} = \frac{2V_A^2}{(V_A + V_1)(V_A - V_2)} L_0$$

Adesso la distanza tra le due auto è diventata

$$\begin{aligned} L^{(1)} &= L_0 + (V_2 - V_1)\left(t_{\text{andata}} + t_{\text{ritorno}}\right) \\ &= \frac{(V_2 + V_A)(V_A - V_1)}{(V_A - V_2)(V_1 + V_A)} L_0 \end{aligned} \tag{15}$$

cioè si è ridotta di un fattore dipendente dalle velocità di ape e automobili. É chiaro che questo avverrà ad ogni "viaggio". La distanza tra le due auto dopo n viaggi di andata e ritorno sarà dunque

$$L^{(n)} = \left[\frac{(V_2 + V_A)(V_A - V_1)}{(V_A - V_2)(V_1 + V_A)} \right]^n L_0 \tag{16}$$

e lo spazio percorso dall'ape nell'andata e ritorno successivi sarà

$$\ell^{(n)} = \left[\frac{(V_2 + V_A)(V_A - V_1)}{(V_A - V_2)(V_1 + V_A)} \right]^n \frac{2V_A^2}{(V_A + V_1)(V_A - V_2)} L_0$$

Possiamo sommare su tutti i viaggi per ottenere il risultato cercato:

$$\ell = \sum_{n=0}^{\infty} \ell^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(V_2 + V_A)(V_A - V_1)}{(V_A - V_2)(V_1 + V_A)} \right]^n \frac{2V_A^2}{(V_A + V_1)(V_A - V_2)} L_0 \tag{17}$$

Ricordando che la somma di una serie geometrica è data (quando $|x| < 1$)

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \tag{18}$$

otteniamo infine

$$\ell = \frac{V_A L_0}{V_1 - V_2} \tag{19}$$

Il risultato precedente si poteva ottenere anche con un procedimento diverso (consigliato)[1].

Soluzione

Il tempo di volo totale dell'ape è tra l'istante iniziale e l'istante in cui le due automobili si incontrano, già determinato precedentemente (Equazione (4)). Lo spazio totale percorso sarà dato da

$$\ell = V_A t^* = V_A \frac{L_0}{V_1 - V_2} = 60\,\mathrm{m/s} \times 20\,\mathrm{s} = 1200\,\mathrm{m} \tag{20}$$

Esercizio

Stimare il numero di viaggi fatti dall'ape tenendo conto delle sue dimensioni. Quando dovrebbe essere grande per fare almeno 10 *viaggi?*

[1] Non deprimetevi se non avete scelto questa strada dall'inizio, siete in buona compagnia. Secondo un aneddoto John von Neumann risolse il problema, che gli era stato proposto, sommando mentalmente la serie.

Soluzione

Considerando un'ape lunga $\delta = 1\,\mathrm{cm}$, i viaggi si concluderanno quando la distanza tra le due automobili raggiungerà tale valore. Possiamo quindi scrivere

$$\delta = L^{(N)} = \left[\frac{(V_2 + V_A)(V_A - V_1)}{(V_A - V_2)(V_1 + V_A)}\right]^N L_0 \tag{21}$$

dove N è il numero di viaggi (andata e ritorno) cercato. Abbiamo

$$N = \frac{\log\left[\delta/L_0\right]}{\log\left[\frac{(V_2+V_A)(V_A-V_1)}{(V_A-V_2)(V_1+V_A)}\right]} = \frac{\log\left[\frac{10^{-2}\,\mathrm{m}}{1600\,\mathrm{m}}\right]}{\log\left[\frac{1}{33}\right]} \simeq 3.4 \tag{22}$$

Per poter fare 100 viaggi dovrà essere

$$\delta = \left[\frac{(V_2 + V_A)(V_A - V_1)}{(V_A - V_2)(V_1 + V_A)}\right]^{10} L_0 = \left(\frac{1}{33}\right)^{10} 1600\,\mathrm{m} \simeq 10^{-12}\mathrm{m} \tag{23}$$

Notare che il raggio (di Bohr) di un atomo di idrogeno vale 5×10^{-11} m.

1.2 Semafori

Esercizio

Un automobilista si muove di moto rettilineo uniforme con velocità v_0. Arriva a una distanza d da un incrocio quando il semaforo diventa giallo. Deve decidere se frenare (con una accelerazione costante $a < 0$) oppure se continuare con velocità costante, in modo da non rimanere in mezzo all'incrocio quando il semaforo diventerà rosso. Sapendo che la larghezza dell'incrocio da attraversare è h e la durata del segnale giallo τ discutere la possibilità di scegliere una o entrambe le possibilità.

Soluzione

Se l'automobilista decide di continuare a muoversi a velocità costante, riuscirà ad attraversare l'incrocio se

$$v_0\tau > d + h \tag{24}$$

Se invece decide di frenare, si arresterà ad un tempo t_* determinato da

$$0 = v_0 + at_* \tag{25}$$

ossia

$$t_* = -\frac{v_0}{a} \tag{26}$$

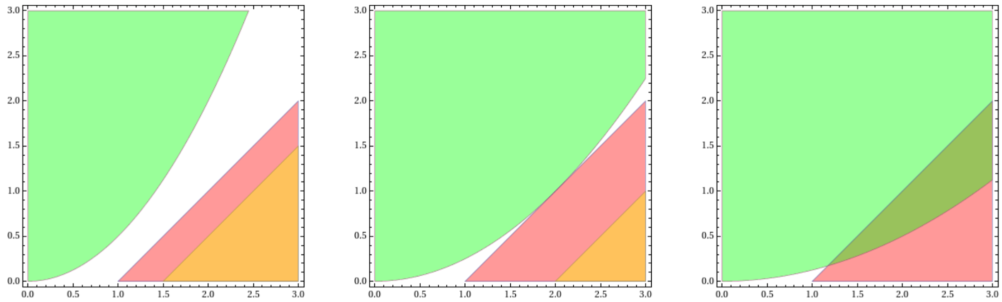

Figura 2: Regioni permesse nel piano (Π_1, Π_2). Da sinistra a destra le regioni corrispondono a $\Pi_3 = 1/2, 1, 2$. La regione verde corrisponde alla condizione (31), quella rossa alla condizione (30) e quella arancio alla condizione (32).

e non si troverà in mezzo all'incrocio se

$$v_0 t_* + \frac{1}{2} a t_*^2 \leq d \tag{27}$$

Sostituendo il valore di t_* otteniamo

$$-\frac{v_0^2}{2a} < d \cup -\frac{v_0^2}{2a} > d + h \tag{28}$$

Un'altra possibilità è che, pure frenando, riesca comunque ad attraversare l'incrocio in tempo utile. Questo accadrà se

$$v_0 \tau + \frac{1}{2} a \tau^2 > d + h \tag{29}$$

Possiamo riscrivere le tre condizioni precedenti nella forma

$$\left(\frac{d}{h}\right) < \left(\frac{v_0 \tau}{h}\right) - 1 \tag{30}$$

$$\left(\frac{d}{h}\right) > \frac{1}{4}\left(-\frac{2h}{a\tau^2}\right)\left(\frac{v_0 \tau}{h}\right)^2 \tag{31}$$

$$\left(\frac{d}{h}\right) < \left(\frac{v_0 \tau}{h}\right) - 1 - \left(-\frac{a\tau^2}{2h}\right) \tag{32}$$

che rappresentano relazioni tra tre quantità adimensionali e positive,

$$\Pi_1 = \frac{v_0 \tau}{h}, \quad \Pi_2 = \frac{d}{h}, \quad \Pi_3 = -\frac{a\tau^2}{2h} \tag{33}$$

Studiamo le zone permesse nel piano (Π_1, Π_2) in funzione di Π_3.