

Esercizio del meteorite

Supponiamo di avere un meteorite a forma sferica con raggio R . Sia η la sua conducibilità termica. Si suppone che al suo interno il calore sia prodotto in modo omogeneo e costante \Rightarrow

$$\frac{dQ}{dt} = k = \text{costante} \Rightarrow$$


Il meteorite è immerso nello spazio vuoto allo zero assoluto nel quale irradia come un corpo nero. Calcolare com'è distribuita la temperatura all'interno del corpo all'equilibrio (\Leftrightarrow tanto Q prodotto, tanto irradiato)

Per simmetria, il calore si propaga radialmente

$$\frac{dQ}{dt} = +\eta S \frac{\Delta T}{l} \Leftrightarrow \frac{dQ}{dt} = +\eta S \frac{\partial T}{\partial r} \Rightarrow$$

in condizioni non stazionarie $\frac{1}{S} \frac{dQ}{dt} = j_Q = +\eta \frac{\partial T}{\partial r}$

j_Q densità di corrente termica



Il calore ^{per unità di tempo} che attraversa una superficie di raggio r è $j_Q 4\pi r^2$

Questo deve essere $-k \frac{4\pi r^3}{3}$

$$j_Q \frac{4\pi r^2}{3} = -\frac{4\pi r^3}{3} k$$

$$j_Q = -\frac{1}{3} kr$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3} kr = +\eta \frac{\partial T}{\partial r} \Rightarrow T(r) = T_0 - \frac{kr^2}{6\eta}$$

Devo trovare T_0

$$\frac{dQ}{dt} = \text{potenza irradiata} \Rightarrow \frac{dQ}{dt} = \sigma_B T^4 S \Rightarrow$$

$$J_Q(R) = \frac{KR}{3} = 4\sigma_B T(R)^4$$

$$\frac{KR}{3} = \sigma_B \left(T_0 - \frac{KR^2}{6\eta} \right)^4$$

$$\Rightarrow T_0 = \left(\frac{KR}{3\sigma_B} \right)^{1/4} + \frac{KR^2}{6\eta}$$

$$\Rightarrow T(r) = \left(\frac{KR}{3\sigma_B} \right)^{1/4} + \frac{K}{6\eta} (R^2 - r^2)$$