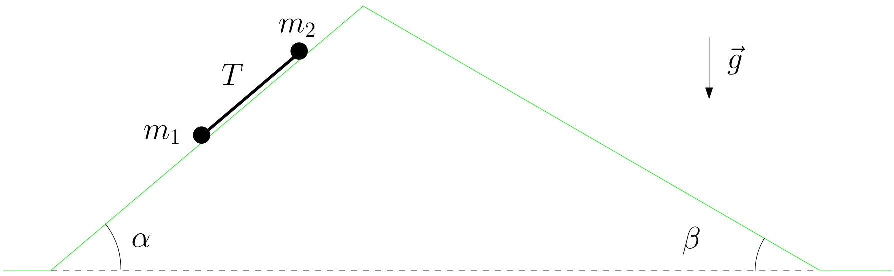
Dipartimento di Fisica - Fisica I b

Compitino del 15 dicembre 2010

Esercizio 1



Due corpi di massa m_1 e m_2 sono collegati da una fune inestensibile di massa nulla e salgono su un piano inclinato collegato a un altro piano in discesa. I due piani formano con la direzione orizzontale angoli rispettivamente $\alpha = \pi/4$ e $\beta = \pi/6$. Tutte le superfici sono liscie.

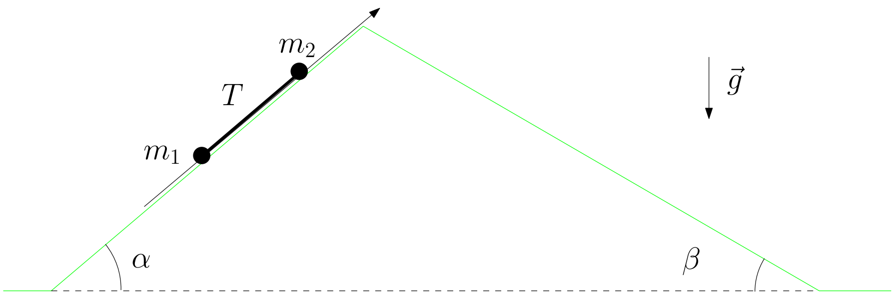
1. Scrivere le equazioni del moto per i due corpi.

2. Il primo corpo valica la cima del piano inclinato e ridiscende dall'altra parte. Calcolare le accelerazioni delle due masse.

3. Se la fune è in grado di sostenere una tensione massima T_{MAX}, per quali valori di m_1 e m_2 questa non si spezza?

Soluzione

Domanda 1



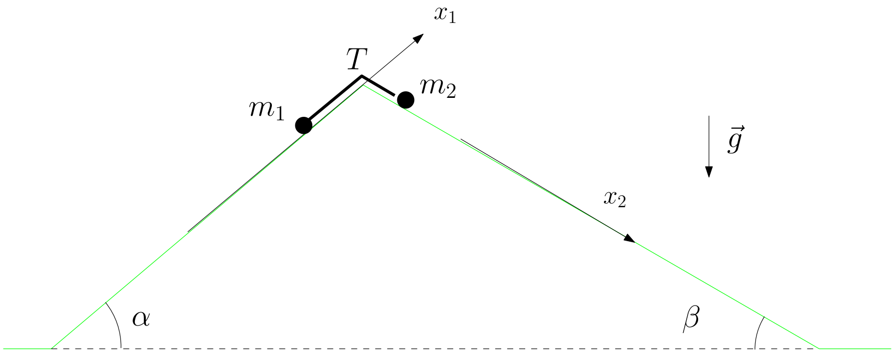
Scegliamo un sistema di riferimento come in figura. Indicando con x_1 e x_2 le coordinate delle due masse abbiamo

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= -m_1 g \sin\alpha + T \\ m_2\ddot{x}_2 &= -m_2 g \sin\alpha - T \end{aligned}$$

e dato che il filo è inestensibile $\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2$ sommando membro a membro otteniamo

$$(m_1 + m_2)\ddot{x}_1 = -(m_1 + m_2) g \sin\alpha$$

Domanda 2 Nella nuova situazione, fissiamo due diversi sistemi di riferimento come in figura. Scriviamo nuovamente le equazioni del moto per le due masse.



Abbiamo

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= -m_1 g\sin\alpha + T \\ m_2\ddot{x}_2 &= m_2 g\sin\beta - T \end{aligned}$$

Anche in questo caso data l'inestensibilità del filo $\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = a$ quindi

$$\begin{aligned} m_1 a &= -m_1 g\sin\alpha + T \\ m_2 a &= m_2 g\sin\beta - T \end{aligned}$$

e sommando membro a membro otteniamo l'accelerazione

$$a = g\frac{m_2\sin\beta - m_1\sin\alpha}{m_1+m_2}$$

che è diretta per ciascuna massa parallelamente al piano di appoggio.

Domanda 3 Dall'equazione del moto scritta nel primo esercizio otteniamo,

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -g\sin\alpha + \frac{1}{m_1}T \\ \ddot{x}_2 &= g\sin\beta - \frac{1}{m_2}T \end{aligned}$$

e sottraendo membro a membro troviamo che $T = 0$ quando le due masse si trovano sullo stesso piano. Se invece si trovano su piani diversi dalle equazioni del moto scritte nel secondo esercizio abbiamo

$$\begin{aligned} a &= -g\sin\alpha + \frac{1}{m_1}T \\ a &= g\sin\beta - \frac{1}{m_2}T \end{aligned}$$

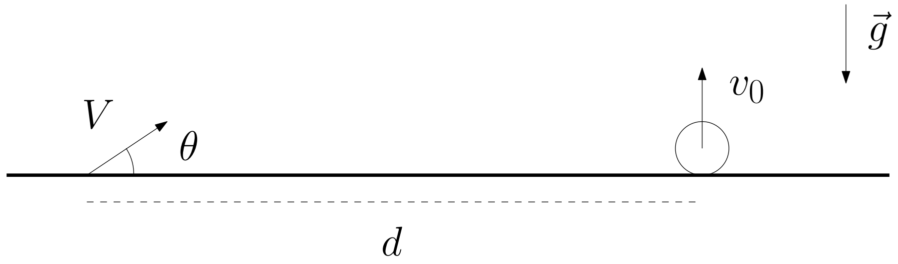
e sottraendo ancora membro a membro abbiamo

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} g\left(\sin\alpha + \sin\beta\right) < T_{MAX}$$

che è la condizione per non far spezzare la fune. Usando i valori dati degli angoli deve essere

$$\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} g\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right) < T_{MAX}$$

Esercizio 2



Un piattello viene lanciato verso l'alto con velocità iniziale v_0. Un tiratore, che si trova ad una distanza d dalla posizione del lancio vuole colpirlo con un proiettile che parte dal fucile con velocità iniziale V.

1. Supponendo che V sia abbastanza grande, e che il tiratore spari nell'istante in cui il piattello si ferma a mezz'aria, determinare l'angolo di inclinazione del fucile rispetto all'orizzontale.

2. Determinare il minimo valore di V per cui è possibile colpire il piattello, nelle stesse ipotesi precedenti riguardo l'istante dello sparo.

3. Determinare l'angolo di inclinazione del fucile rispetto all'orizzontale se lo sparo avviene all'istante del lancio, nell'ipotesi che V sia sufficientemente grande.

Soluzione

Domanda 1 Calcoliamo l'altezza h alla quale si ferma il piattello. Ponendo $t = 0$ al momento del lancio deve essere

$$v_p(t) = v_0 - gt = 0$$

e

$$y_p(t) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = h$$

Sostituendo nella seconda equazione il tempo $t = v_0/g$ ricavato dalla prima abbiamo

$$h = \frac{v_0^2}{2g}$$

Adesso poniamo $t = 0$ al momento dello sparo. Le leggi orarie del proiettile si possono scrivere

$$\begin{aligned} X(t) &= Vt\cos\theta \\ Y(t) &= Vt\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

e quelle del piattello

$$\begin{aligned} x_p(t) &= d \\ y_p(t) &= h - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

Se questo viene colpito deve essere ad un certo istante$X(\bar{t}) = x_p(\bar{t})$ e $Y(\bar{t}) = y_p(\bar{t})$ cioè

$$\begin{aligned} V\bar{t}\cos\theta &= d \\ V\bar{t}\sin\theta - \frac{1}{2}g\bar{t}^2 &= h - \frac{1}{2}g\bar{t}^2 \end{aligned}$$

Dalla prima equazione troviamo

$$\bar{t} = \frac{d}{V\cos\theta}$$

e sostituendo nella seconda abbiamo

$$\tan\theta = \frac{h}{d} = \frac{v_0^2}{2gd}$$

cioè si deve mirare alla posizione in cui il piattello si ferma.

Domanda 2 Per colpire il piattello la collisione tra questo e il proiettile deve avvenire a $y > 0$. Quindi

$$y_p(\bar{t}) = h - \frac{1}{2}g\frac{d^2}{V^2\cos^2\theta} > 0$$

da cui

$$V^2 > \frac{gd^2}{2h\cos^2\theta} = \frac{g^2d^2}{v_0^2}\left(1+\tan^2\theta\right)$$

cioè

$$V > \frac{v_0}{2}\sqrt{1+\left(\frac{2gd}{v_0^2}\right)^2}$$

Domanda 3 In questo caso le leggi orarie si scrivono

$$\begin{aligned} X(t) &= Vt\cos\theta \\ Y(t) &= Vt\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2 \\ x_p(t) &= d \\ y_p(t) &= v_0t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

La collisione avviene dopo un tempo

$$\bar{t} = \frac{d}{V\cos\theta}$$

come nel caso precedente, e deve essere

$$V\bar{t}\sin\theta - \frac{1}{2}g\bar{t}^2 = v_0\bar{t} - \frac{1}{2}g\bar{t}^2$$

Segue che la velocità verticale del piattello e del proiettile devono essere le stesse

$$V\sin\theta = v_0$$

e quindi

$$\sin\theta = \frac{v_0}{V}$$