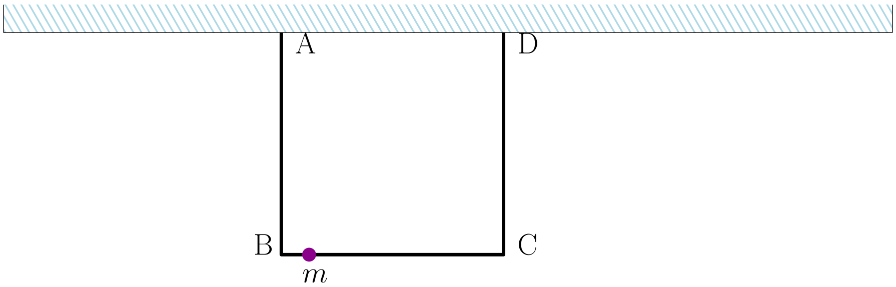
Dipartimento di Fisica - Fisica 1 b

Scritto 27 giugno 2011

Esercizio 1 (15 punti)



La struttura in figura è composta da tre aste identiche di lunghezza ℓ e massa M. L'angolo delle giunzioni A, B, C e D è libero di variare, ed $\overline{AD} = \ell$. Inoltre una massa puntiforme m è fissata sulla barra BC ad una distanza x da B.

1. Determinare la posizione di equilibrio stabile del sistema.
2. Se il sistema si trova nella posizione di equilibrio precedentemente calcolata, per quale valore minimo dell'energia cinetica iniziale il sistema batte contro il soffitto?
3. Determinare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio, e discuterne la dipendenza da x.

Soluzione

Domanda 1

Quando la struttura si piega la sbarra BC resta orizzontale. La posizione di equilibrio stabile è quella che rende minima la posizione del centro di massa del sistema. Detto θ l'angolo che la sbarra AB forma con la verticale sarà

$$y_{cm} = \frac{-2M\frac{\ell}{2}\cos\theta - (M+m)\,\ell\cos\theta}{3M+m}$$

che è minima per $\theta = 0$, cioè nella posizione in figura.

Domanda 2

L'energia cinetica deve essere uguale alla differenza tra energia potenziale iniziale e finale, quindi

$$E_C \geq 2M\frac{\ell}{2}g + (M+m)\ell g$$

Domanda 3

L'energia cinetica del sistema vale

$$E_C = \frac{1}{2}2I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left(M+m\right)\ell^2\dot{\theta}^2$$

dove si è tenuto conto del fatto che la sbarra BC non ruota, ma trasla con velocità $\ell\dot{\theta}$. Il momento di inerzia I della sbarra è calcolato rispetto ad un suo estremo, $I = M\ell^2/3$. L'energia potenziale del sistema vale invece

$$U = (3M+m)gy_{cm} = -\left[2M+m\right]g\ell\cos\theta \simeq \left(2M+m\right)g\ell\left(-1+\frac{\theta^2}{2}\right)$$

Abbiamo quindi

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\left(2M+m\right)g\ell}{2I+\left(M+m\right)\ell^2}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{6M+3m}{5M+3m}\right)\frac{g}{\ell}}$$

che è indipendente da x.

Esercizio 2 (15 punti)

Una macchina termica e realizzata con una mole di un gas perfetto sottoposto alla trasformazione ciclica che segue:

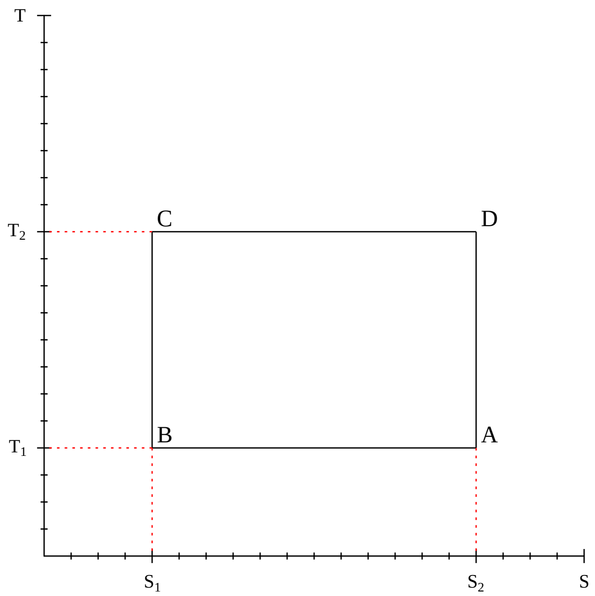
- Una compressione isoterma ($A \to B$) alla temperatura T_1, dal volume V_A al volume V_B, durante la quale il sistema rimane in contatto con una sorgente di temperatura $T_- < T_1$ tramite una sbarra di resistenza termica R_T.
- Una compressione adiabatica ($B \to C$) che porta il sistema alla temperatura $T_2 > T_1$.
- Una espansione isoterma ($C \to D$) alla temperatura T_2, durante la quale il sistema rimane in contatto con una sorgente di temperatura $T_+ > T_2$ tramite una sbarra identica alla precedente.
- Una espansione adiabatica ($D \to A$) che riporta il sistema alla temperatura T_1.

Si può assumere che lo stato termodinamico del gas sia ben definito istante per istante. Inoltre $T_+ = 9T_-$.

1. Rappresentare la trasformazione nel piano S-T e calcolare il tempo necessario per eseguire le due isoterme.
2. Scegliere le temperature T_1 e T_2 in modo da avere la massima efficienza, e calcolare quest'ultima.
3. Assumendo che la durata delle adiabatiche sia trascurabile rispetto a quello delle isoterme e sapendo che $T_1 = 2T_-$ scegliere le temperatura T_2 in modo da avere la massima potenza. Calcolare in questo caso l'efficienza.

Soluzione

Domanda 1



Nel piano T-S le adiabatiche sono curve a entropia costante, quindi il ciclo si rappresenta come in figura. Durante la compressione isoterma il sistema assorbe un calore

$$Q_{AB} = T_1 (S_B - S_A) = T_1 R \log \frac{V_B}{V_A} < 0$$

e il tempo necessario perchè questo avvenga per conduzione attraverso la sbarra è dato da

$$\tau_{AB}\left(\frac{T_1 - T_-}{R_T}\right) = -Q_{AB}$$

cioè

$$\tau_{AB} = \frac{T_1 R_T}{T_1 - T_-} R \log\frac{V_A}{V_B}$$

Analogamente durante l'espansione isoterma il sistema assorbe un calore

$$Q_{CD} = T_2\left(S_D - S_C\right) = T_2 R \log\frac{V_A}{V_B} > 0$$

in un tempo

$$\tau_{CD} = \frac{T_2 R_T}{T_+ - T_2} R \log\frac{V_A}{V_B}$$

Domanda 2

L'efficienza è massima quando è massimo il rapporto T_2/T_1. Possiamo prendere $T_2 = T_+$ e $T_1 = T_-$. In questo caso abbiamo

$$\eta = 1 - \frac{T_-}{T_+} = \frac{8}{9}$$

Domanda 3

La potenza è il rapporto tra il lavoro prodotto in un ciclo e la sua durata. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}
P &= \frac{\left(T_2 - T_1\right)\left(S_D - S_C\right)}{R_T\left(\frac{T_1}{T_1 - T_-} + \frac{T_2}{T_+ - T_2}\right)\left(S_D - S_C\right)} \\
&= \frac{1}{R_T}\frac{\left(T_2 - T_1\right)\left(T_1 - T_-\right)(T_+ - T_2)}{T_1(T_+ - T_2) + T_2(T_1 - T_-)} \\
&= \frac{1}{R_T}\frac{\left(T_2 - T_1\right)\left(T_1 - T_-\right)(9T_- - T_2)}{9T_1 T_- - T_2 T_-}
\end{aligned}$$

Ponendo $x = T_2/T_-$ abbiamo

$$P = \frac{T_-}{R_T}\frac{(x-2)\,(9-x)}{18 - x}$$

Troviamo il massimo. La derivata

$$\frac{dP}{dx} = \frac{T_-}{R_T}\frac{180 - 36x + x^2}{(x-18)^2}$$

di annulla per $x = 6$ e $x = 30$. La prima soluzione è quella accettabile, dato che $T_2 < T_+$. Quindi

$$T_2 = 6T_-$$

L'efficienza vale in questo caso

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{2T_-}{6T_-} = \frac{2}{3}$$