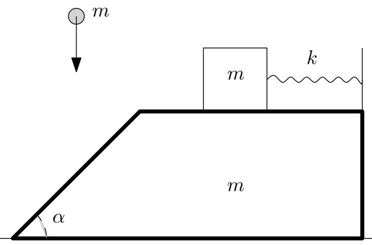
Dipartimento di Fisica - Fisica 1 b

Scritto 8 settembre 2011

Esercizio 1 (15 punti)



Una piattaforma di massa m, della forma rappresentata in figura, è appoggiata su un piano orizzontale privo di attrito. Sopra di essa si trova un blocco, pure di massa m. Piattaforma e blocco sono collegate da una molla di costante elastica k, inizialmente a riposo. Una terza massa, che si può considerare un punto materiale, viene lasciata cadere sulla superficie obliqua della piattaforma (inclinata rispetto all'orizzontale di un angolo α) in modo da colpirla con velocità v_0. L'urto è elastico e istantaneo.

1. Calcolare le componenti orizzontali e verticali della velocità del punto materiale dopo l'urto.
2. Scrivere le equazioni del moto della piattaforma e del blocco e le relative condizioni iniziali.
3. Determinare il massimo allungamento della molla.

Soluzioni

Esercizio 1

Durante l'urto la molla è a riposo, quindi non applica forze alla piattaforma e si può ignorare il blocco. L'energia e la quantità di moto orizzontale del sistema particella+piattaforma si conservano. Inoltre si conserva la componente parallela al lato obliquo della piattaforma della quantità di moto della particella. Abbiamo quindi

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}mv_0^2 &= \frac{1}{2}m\left(v_x^2+v_y^2+V^2\right)\\
0 &= m\left(v_x+V\right)\\
-mv_0\sin\alpha &= mv_y\sin\alpha+mv_x\cos\alpha
\end{aligned}
$$

dove v_x, v_y sono le componenti della velocità della particella dopo l'urto cercate, e V la velocità della piattaforma. Possiamo scrivere

$$
\begin{aligned}
v_0^2-v_y^2 &= 2v_x^2\\
v_0+v_y &= -v_x\cot\alpha
\end{aligned}
$$

e quindi (escludendo la soluzione non accettabile $v_x=0$, $v_y=-v_0$)

$$
\begin{aligned}
v_0 &= v_y-2v_x\tan\alpha\\
v_0 &= -v_y-v_x\cot\alpha
\end{aligned}
$$

Risolvendo troviamo

$$
\begin{aligned}
v_x &= \frac{2\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha-3}v_0\\
v_y &= \frac{3\cos 2\alpha-1}{\cos 2\alpha-3}
\end{aligned}
$$

Esercizio 2

Indichiamo con X la posizione orizzontale dell'estremo della piattaforma a cui è fissata la molla, con x quella del blocco. Avremo, indicando con ℓ_0 la lunghezza a riposo della molla,

$$
\begin{aligned}
m\ddot{X} &= -k\left(X-x-\ell_0\right)\\
m\ddot{x} &= k\left(X-x-\ell_0\right)
\end{aligned}
$$

Le condizioni iniziali saranno le velocità e le posizioni di piattaforma e blocco, ossia

$$\begin{aligned} X(0) &= 0 \\ \dot{X}(0) &= V \\ x(0) &= -\ell_0 \\ \dot{x}(0) &= 0 \end{aligned}$$

dove si è scelta l'origine nella posizione iniziale dell'estremo della piattaforma. Il valore di V si determina usando le equazioni scritte precedentemente, in particolare

$$V = -v_x = \frac{2\sin 2\alpha}{3-\cos 2\alpha} v_0$$

Esercizio 3

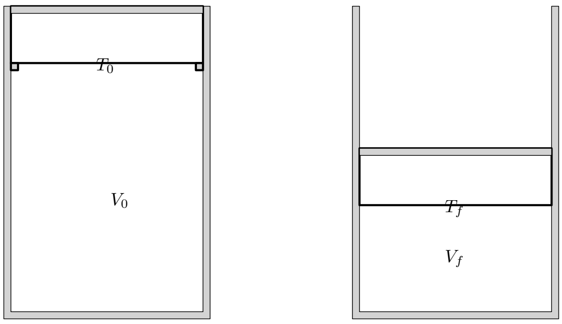
L'energia disponibile nel centro di massa si conserva, quindi

$$\frac{\mu}{2} v_{rel}^2 = \frac{k}{2}\delta^2$$

dove $v_{rel} = \dot{x} - \dot{X}$ è la velocità relativa iniziale del blocco rispetto alla piattaforma, $\mu = m/2$ la massa ridotta del sistema, e δ_{MAX} l'allungamento massimo cercato. Risolvendo abbiamo

$$\delta_{MAX} = \sqrt{\frac{\mu}{m}} V = \sqrt{\frac{\mu}{m}} \frac{2\sin 2\alpha}{3-\cos 2\alpha} v_0$$

Esercizio 2 (15 punti)



Un recipiente cilindrico di sezione S impermeabile al calore contiene n moli di un gas perfetto, ed è chiuso superiormente con un pistone scorrevole di massa m e capacità termica C. Il pistone può scambiare calore con il gas, ma il suo lato superiore è isolato termicamente, quindi non sono possibili scambi di calore con l'esterno del sistema.

Inizialmente il pistone è mantenuto fermo con un opportuno vincolo. La sua temperatura (e quella del gas) è T_0 e il volume del gas vale V_0. Si rimuove quindi il vincolo.

1. Per quali temperature T_0 il pistone si abbassa?
2. Supponendo che T_0 soddisfi la condizione determinata alla domanda precedente, calcolare la temperatura finale T_f del sistema quando questo raggiunge nuovamente l'equilibrio termodinamico.
3. Calcolare la variazione di entropia del sistema.

Soluzioni

Esercizio 1

Il pistone si abbassa se la forza esercitata inizialmente dal gas sul pistone è minore del suo peso, ossia

$$P_0 S < mg$$

da cui

$$T_0 < \frac{mg}{nR} V_0$$

Esercizio 2

Dalla conservazione dell'energia, abbiamo che

$$(nc_V + C)\,T_0 + mg\frac{V_0}{S} = (nc_V + C)\,T_f + mg\frac{V_f}{S}$$

ma

$$V_f = \frac{nRS}{mg}T_f$$

e quindi

$$T_f = \frac{nc_V + C}{nc_P + C}T_0 + \frac{mgV_0}{S\,(nc_P + C)}$$

Esercizio 3

L'entropia del sistema è quella del gas perfetto più quella del pistone. A meno di una costante adittiva si ha quindi

$$S = (nc_V + C)\log T + nR\log V$$

e si può calcolare direttamente la variazione:

$$\begin{aligned}
\Delta S &= (nc_V + C)\log\frac{T_f}{T_0} + nR\log\frac{V_f}{V_0} \\
&= (nc_V + C)\log\left[\frac{nc_V + C}{nc_P + C} + \frac{mgV_0}{ST_0\,(nc_P + C)}\right] \\
&+ nR\log\left[\frac{nc_V + C}{nc_P + C}\left(\frac{nRST_0}{mgV_0}\right) + \frac{nR}{(nc_P + C)}\right]
\end{aligned}$$