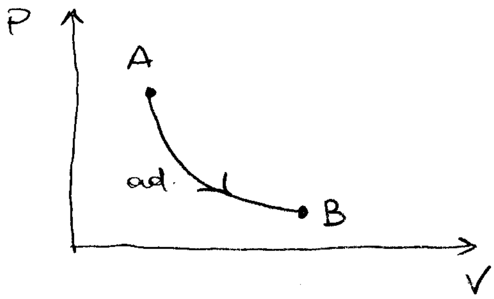
Esercizio sulle isoentropiche

Un sistema va da A a B con un'adiabatica reversibile.

1) È possibile formare un ciclo con quest'adiabatica reversibile e una irreversibile?



No: se faccio un'adiabatica irreversibile, non posso tornare in A

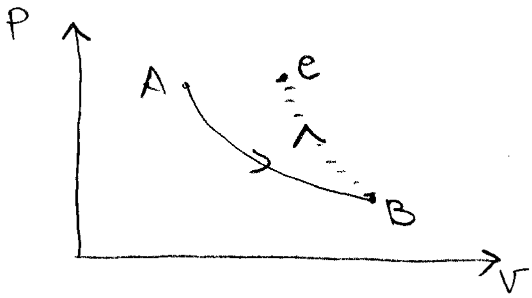
Infatti $\Delta S_{\substack{rev \\ AB}} + \Delta S_{\substack{irr \\ BA}} = \Delta S_{irr} > 0$

se facessi un ciclo dovrei avere

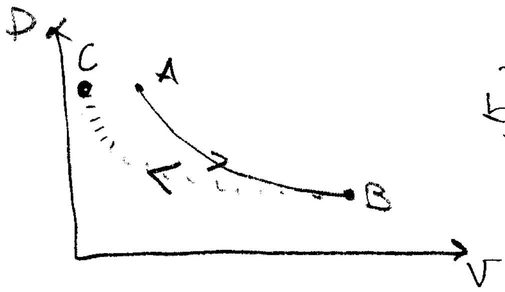
$$\Delta S_{AB} + \Delta S_{BA} = 0$$

$\Rightarrow$ dove vado? Dov'è C

a)



o



b)

$\Delta S_{AC} > 0$

Se gas perfetto $\Delta S_{AC} = n c_V \ln \frac{T_C}{T_A} + n R \ln \frac{V_C}{V_A}$

$\Delta S_{AC} > 0$ in a) e non in b)

Sistema qualunque :

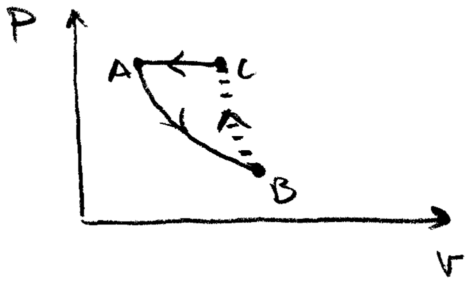
$$\Delta S_{AC} = \int_A^C \frac{\delta Q}{T} > 0 \quad \text{per} \quad \delta Q > 0 \Rightarrow$$

$$\Delta U = \Delta Q - \Delta \mathcal{L}$$

$$\begin{cases} \Delta U = C_p \, \Delta T \\ \Delta \mathcal{L} = p\,(V_C - V_A) \end{cases} \qquad \Delta Q = \Delta U + \Delta \mathcal{L}$$

$\Rightarrow$ $\Delta Q_{AC} > 0$ se C è a dx di A

$\Rightarrow$ consideriamo adesso il ciclo



siano n moli di gas perfetto

conosco T_A e T_C.

Trovare $\mathcal{L}_{tot}$ e ΔS_{BC}

Si potrebbe imporre

$pV^\gamma = \text{cost.}$

o simili, ma ho troppo pochi dati

$\Rightarrow$ se volevo $\mathcal{L}_{tot} = \mathcal{L}_{AB} + \mathcal{L}_{BC} + \mathcal{L}_{CA}$

ho troppe incognite !!

$\Rightarrow$ Uso i principi della termodin. $\Rightarrow$

$$\Delta U_{ciclo} = 0 = \Delta Q_{tot} - \mathcal{L}_{tot}$$

$$\mathcal{L}_{tot} = \cancel{\Delta Q_{AB}} + \cancel{\Delta Q_{BC}} + \Delta Q_{CA}$$

$$\Delta Q_{CA} = n\, C_p\, (T_C - T_A) \Rightarrow \mathcal{L}_{tot} = n C_p (T_C - T_A)$$

$$\Delta S_{tot} = 0 = \Delta S_{BC} + \Delta S_{CA}$$

$$\Delta S_{BC} = -\Delta S_{CA} = + n\, R \ln \frac{V_C}{V_A} + n C_V \ln \frac{T_C}{T_A}$$

$$= + n R \ln \frac{nRT_C}{p_A V_A} + n C_V \ln \frac{T_C}{T_A}$$

$$= + n R \ln \frac{T_C}{T_A} + n C_V \ln \frac{T_C}{T_A}$$

$$= + n\, C_p \ln \frac{T_C}{T_A}$$

Altro modo di ricavare ΔS_{CA}:

$$\Delta S_{CA} = n\, C_p \int_C^A \frac{dT}{T} = n C_p \ln \frac{T_A}{T_C} .$$

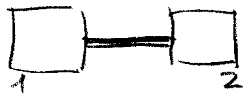
Nota che $\Delta S_{BC} = n C_V \ln \frac{T_C}{T_B} + n R \ln \frac{V_C}{V_B}$

$$= \underset{\substack{\uparrow \\ \text{un po' di conti}}}{\cdots} = n\, C_p \ln \left(\frac{T_C}{T_A}\right)$$

Esercizio su entropia

Due sistemi con capacità termica C, a temperatura $T_1 < T_2$

1) Li mettiamo a contatto. Trovare $T^* =$ temp. di equilibrio e $\Delta S_{tot} =$ variazione di entropia del sistema $1+2$.



$$\Delta Q_{1\to 2} + \Delta Q_{2\to 1} = 0$$

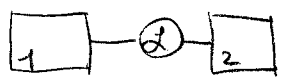
$$C(T^* - T_1) + C(T^* - T_2) = 0 \qquad T^* = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

$$\Delta S_{tot} = \Delta S_1 + \Delta S_2 = C\int_{T_1}^{T^*} \frac{dT}{T} + C\int_{T_2}^{T^*} \frac{dT}{T}$$

$$= C\left(\ln\frac{T^*}{T_1} + \ln\frac{T^*}{T_2}\right)$$

$$= C\left[\ln\left(\frac{1}{2} + \frac{T_2}{2T_1}\right) + \ln\left(\frac{1}{2} + \frac{T_1}{2T_2}\right)\right]$$

2) Invece di mettere 1 e 2 a contatto, li collego con una macchina termica che preleva calore da 2 e scalda 1. Trovare $\mathcal{L}_{max}$ compiuto dalla macchina e la $T_{eq}|_{min}$ che si può raggiungere.



Per la macchina (isolata termicamente)

$$\Delta U = \Delta Q - \mathcal{L} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\mathcal{L} = \Delta Q = \Delta Q_{\mathcal{L}1} + \Delta Q_{\mathcal{L}2} = -\Delta Q_1 - \Delta Q_2$$

$$= C(T_1 - T_0) + C(T_2 - T_0)$$

Ma $T_0 = 0\,K$ non è possibile (II principio)

Infatti

$$\Delta S_{1+2+m} \geq 0$$

$$\parallel$$

$$\Delta S_1 + \Delta S_2 + \cancel{\Delta S_m} \geq 0$$

macchina reversibile

$$\Delta S_1 = C \ln \frac{T_0}{T_1}$$

$$\Delta S_2 = C \ln \frac{T_0}{T_2}$$

$$\ln \frac{T_0}{T_1} + \ln \frac{T_0}{T_2} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad T_0 \geq \sqrt{T_1 T_2}$$

$$\Rightarrow \quad T_{0_{min}} = \sqrt{T_1 T_2} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}_{max} = C\left(T_1 + T_2 - 2\sqrt{T_1 T_2}\right)$$

3) Adesso ho $\underset{1}{\boxed{T_0}}$ $\underset{2}{\boxed{T_0}}$ e lavoro $\mathcal{L}_{max}$

Posso usare $\mathcal{L}_{max}$ per scaldare 1. Qual è $T_{1,f}\big|_{max}$?

i) $\mathcal{L}_{max}$ lo "butto" tutto in 1 $\Rightarrow$

$$C\left(T_{1,f} - T_0\right) = \mathcal{L}_{max}$$

$$\cancel{C}\left(T_{1f} \cancel{- \sqrt{T_1 T_2}}\right) = \cancel{C}\left(T_1 + T_2 - \cancel{2}\sqrt{T_1 T_2}\right)$$

$$T_{1f} = T_1 + T_2 - \sqrt{T_1 T_2}$$

ii) uso $\mathcal{L}_{max}$ per estrarre Q da 2 e portarlo in 1

Opero in maniera reversibile

$$\Rightarrow \quad C\left(T_{1,f} - T_0\right) = \mathcal{L}_{max} - C\left(T_{2,f} - T_0\right)$$

Per trovare una seconda eqn di nuovo impongo

$$\Delta S_1 + \Delta S_2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\cancel{C} \ln \frac{T_{1,f}}{T_0} + \cancel{C} \ln \frac{T_{2f}}{T_0} = 0$$

$$T_{1f} T_{2f} = T_0^2 \quad \Rightarrow \quad T_{2f} = \frac{T_1 T_2}{T_{1f}}$$

$$\cancel{C}\left(T_{1f} - \sqrt{T_1 T_2}\right) = \cancel{C}\left(T_1 + T_2 - 2\sqrt{T_1 T_2}\right)$$

$$- \cancel{C}\left(\frac{T_1 T_2}{T_{1f}} - \sqrt{T_1 T_2}\right)$$

$$T_{1f} - \cancel{\sqrt{T_1 T_2}} = T_1 + T_2 - \cancel{\sqrt{T_1 T_2}} - \frac{T_1 T_2}{T_{1f}}$$

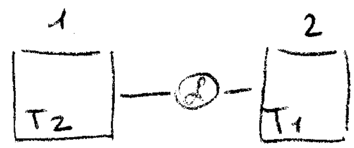
$$T_{1f}^2 - (T_1 + T_2) T_{1f} + T_1 T_2 = 0$$

$$(T_{1f} - T_1)(T_{1f} - T_2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad T_{1f} = T_1$$
$$T_{1f} = T_2$$

$$\Rightarrow \quad T_{1f}\big|_{max} = T_2$$

Nota che $\quad T_{2f} = \frac{T_1 T_2}{T_{1f}} = T_1 \Rightarrow$ ho



Vediamo che $\quad T_1 + T_2 - \sqrt{T_1 T_2} < T_2$

Infatti $\quad T_1 + T_2 - \sqrt{T_1 T_2} < \cancel{T_1} + T_2 - \cancel{\sqrt{T_1 T_1}}$.