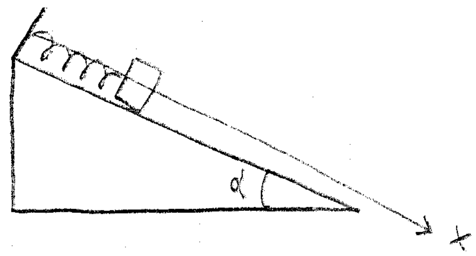
Esercizio della molla sul piano inclinato

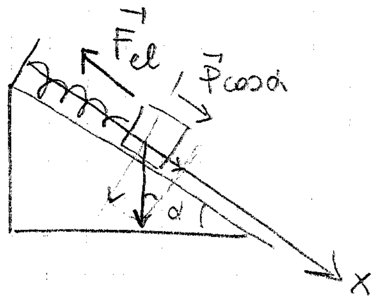
Sia



l_0 = lunghezza di riposo della molla

m = massa dell'oggetto

1) Trovare la posizione d'equilibrio:



$$\vec{F} = \vec{F}_{el} + \vec{P} \quad \Rightarrow \quad \text{lungo } x$$

$$\boxed{m\ddot{x} = -k(x - l_0) + mg\sin\alpha}$$

Equilibrio $\ddot{x} = 0 \Rightarrow$

$$-kx + kl_0 + mg\sin\alpha = 0$$

$$x_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k}\sin\alpha$$

2) Risolvere l'eq. del moto:

$$m\ddot{x} = -kx + kx_{eq} = -k(x - x_{eq})$$

$$y \equiv x - x_{eq} \quad \Rightarrow \quad m\ddot{y} = -ky$$

$$\ddot{y} = \ddot{x}$$

$$y(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$x(t) = x_{eq} + A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \varphi\right)$$

Periodo delle piccole oscillazioni è $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

Supponiamo che a $t=0$ $\quad x(0) = l_0$

$\dot{x}(0) = 0$

troviamo A e φ

$$x(0) = x_{eq} + A\cos\varphi = l_0$$

$$\dot{x}(0) = -A\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 0$$

$$\underbrace{\cancel{l_0} + \frac{mg}{k}\sin\alpha}_{x_{eq}} + A = \cancel{l_0} \qquad A = -\frac{mg}{k}\sin\alpha$$

$$x(t) = l_0 + \frac{mg\sin\alpha}{k}\left(1 - \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)\right)$$

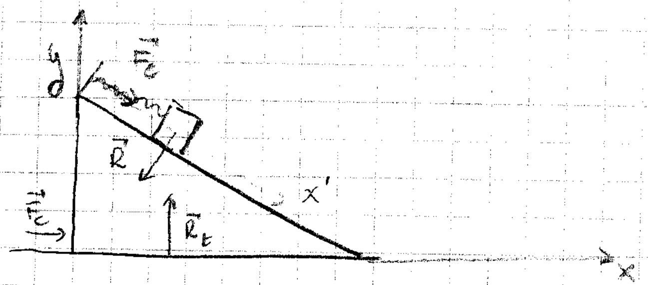
Trovare x_{max} :

$$x_{max} \Rightarrow \dot{x}(t) = 0 \Rightarrow \frac{mg\sin\alpha}{k}\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{k}{m}}\,t = \pi \quad \Rightarrow$$

$$x_{max} = l_0 + \frac{2mg\sin\alpha}{k} = \frac{2mg\sin\alpha}{k} + l_0$$

Supponiamo che il piano inclinato sia incollato sul tavolo. Trovare, in funzione del tempo, il modulo della forza esercitata dalla colla e della forza esercitata dal tavolo



Supponiamo $\vec{F}_{colla} \parallel \hat{x}$

$$M\vec{g} + \vec{R}_t + \vec{F}_c + \vec{F}_{el} + \vec{R} = M\vec{A} = 0$$

$$|\vec{F}_{el}| = k\,(x'(t) - l_0) \qquad \Rightarrow \qquad x'(t) = l_0 + \frac{mg\sin\alpha}{k}(1-\cos\omega t)$$

$$|\vec{R}| = mg\cos\alpha \qquad \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\begin{cases} \hat{x} & 0 = F_c + F_{el}\cos\alpha - R\sin\alpha \\ \hat{j} & 0 = -Mg + R_t - F_{el}\sin\alpha - R\cos\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_c = R\sin\alpha - F_{el}\cos\alpha = mg\cos\alpha\sin\alpha - mg\sin\alpha(1-\cos\omega t)\cos\alpha \\ \qquad = mg\cos\alpha\sin\alpha\cos\omega t \\ R_t = Mg + F_{el}\sin\alpha + R\cos\alpha = Mg + mg\sin\alpha(1-\cos\omega t)\sin\alpha \\ \qquad + mg\cos^2\alpha \\ \qquad = Mg + mg - mg\sin^2\alpha\cos\omega t \end{cases}$$