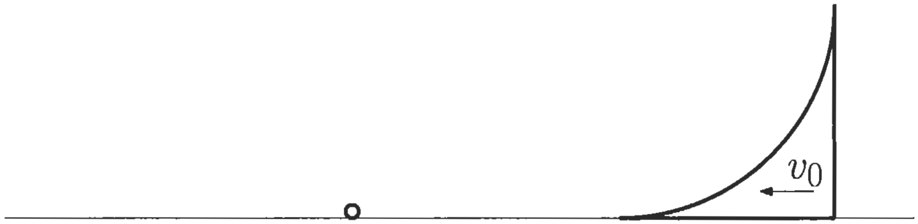
Esercizio 3 (fisica I vecchio ordinamento)



Una pallina di massa m, che si può approssimare come un punto materiale, si trova inizialmente in quiete su in piano orizzontale privo di attrito. Un corpo della forma in figura (il profilo superiore è un quarto di circonferenza di raggio R), di uguale massa, viene lanciato verso di esso con velocità iniziale v_0.

1. Per quale valore della velocità iniziale v_0^* la pallina giunge alla sommità del corpo?

2. Supponendo $v_0 < v_0^*$ determinare la velocità del corpo quando la pallina raggiunge l'altezza massima. e determinare tale altezza max.

3. Supponendo adesso $v_0 > v_0^*$, determinare la forza applicata dalla pallina al corpo al momento del distacco da esso.

Soluzione

2   1 SR generico

Domanda 1 Usando la conservazione dell'energia nel sistema del centro di massa abbiamo

$$\frac{1}{2}\mu\left(v_0^*\right)^2 = mgR$$

dove $\mu = m/2$ è la massa ridotta. Segue

$$v_0^* = \sqrt{4gR}$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2}(m+m) v^2 + mgR$$

$$m v_0 = (m+m) v \Rightarrow v = \frac{v_0}{2}$$

$$\frac{1}{2} \cancel{m} v_0^2 = \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{2} \cancel{m} \frac{v_0^2}{4} + \cancel{m} gR$$

$$\frac{1}{4} v_0^2 = gR$$

Domanda 2 Quando la pallina raggiunge l'altezza massima si muove con la stessa velocità V (orizzontale) del corpo. Dalla conservazione della quantità di moto orizzontale troviamo

$$mv_0 = 2mV$$

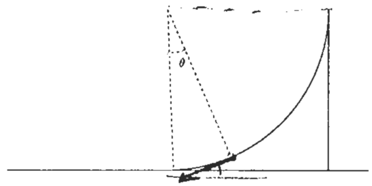
e quindi

$$V = \frac{v_0}{2}$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2}(m+m) v^2 + mgh \Rightarrow \frac{1}{2} \cancel{m} v_0^2 = \cancel{\frac{1}{2}} \cancel{2} \cancel{m} \frac{v_0^2}{4} + \cancel{m} g h$$

$$gh = \frac{v_0^2}{4} \qquad h = \frac{v_0^2}{4g}$$

Domanda 3



Detta X la posizione orizzontale del centro dell'arco di circonferenza, e θ l'angolo che determina la posizione della pallina su di esso come in figura, possiamo scrivere la quantità di moto orizzontale come

$$P = m\left(2\dot{X} + R\dot{\theta}\cos\theta\right) \qquad m\dot{X} + m(\dot{X} + R\dot{\theta}\cos\theta)$$

Da questa seconda relazione otteniamo

$$m\dot{X} = \frac{1}{2}\left(P - mR\dot{\theta}\cos\theta\right)$$

e derivando abbiamo la forza applicata al corpo $(\dot{P} = 0)$

$$F = m\ddot{X} = \frac{1}{2}\left(mR\dot{\theta}^2\sin\theta - mR\ddot{\theta}\cos\theta\right)$$

Al momento del distacco $\theta = \pi/2$ e quindi

$$F = \frac{1}{2}mR\dot{\theta}^2$$

Ricaviamo $\dot{\theta}^2$ dalla conservazione dell'energia. Nel momento del distacco l'energia nel sistema del centro di massa vale

$$E = \frac{1}{2}\mu R^2\dot{\theta}^2 + mgR = \frac{1}{2}\mu v_0^2$$

e quindi

$$\dot{\theta}^2 = \frac{v_0^2}{R^2} - \frac{4g}{R}$$

da cui

$$F = \frac{m}{2R}\left(v_0^2 - 4gR\right)$$

Notare che $F = 0$ se $v_0 = v_0^*$. ✓