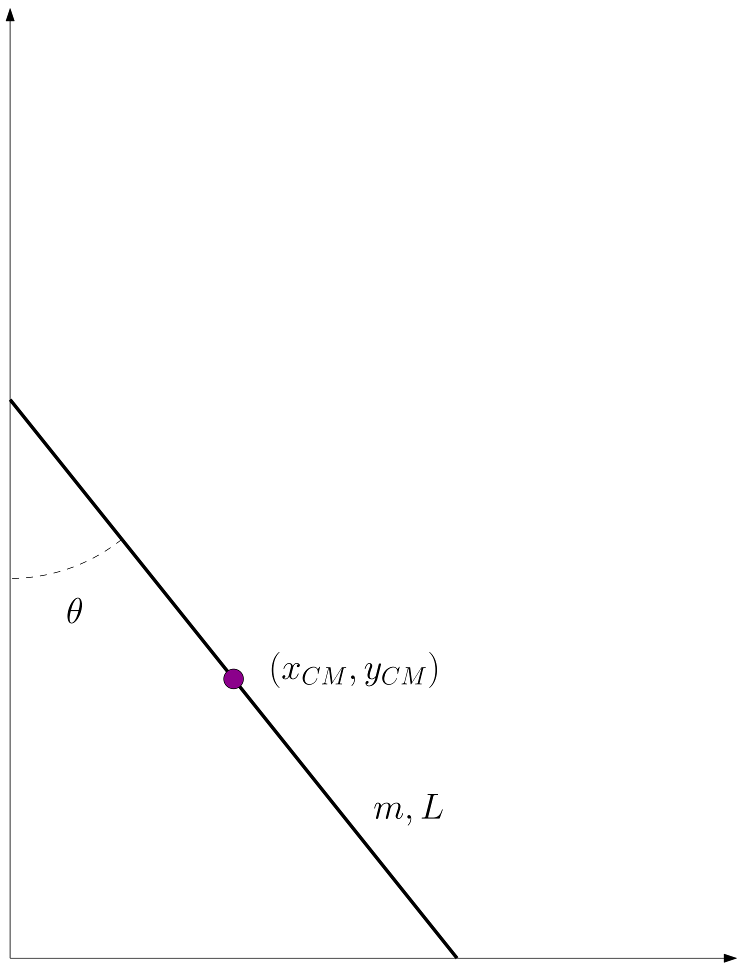

Una sbarra omogenea di lunghezza L e massa m è appoggiata a una parete verticale, e forma con essa un angolo θ_0. Non vi sono attriti, e la sbarra viene lasciata libera di cadere.

Scrivere l'energia del sistema Consideriamo un punto dell'asta a una distanza ℓ dall'estremo superiore. Le sue coordinate sono

$$\begin{aligned} x(\ell) &= \ell \sin\theta \\ y(\ell) &= (L-\ell)\cos\theta \end{aligned}$$

L'energia cinetica dell'asta si può scrivere come

$$K = \frac{1}{2}\int v^2(\ell)dm$$

ma

$$v^2(\ell) = \dot{x}(\ell)^2 + \dot{y}(\ell)^2$$

dove

$$\begin{aligned}\dot{x}(\ell) &= \ell\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y}(\ell) &= -(L-\ell)\,\dot{\theta}\sin\theta\end{aligned}$$

e quindi

$$v^2(\ell) = \left(\ell^2 + L^2\sin^2\theta - 2L\ell\sin^2\theta\right)\dot{\theta}^2$$

Calcoliamo adesso l'integrale:

$$\begin{aligned}K &= \frac{1}{2}\int_0^L \left(\ell^2 + L^2\sin^2\theta - 2L\ell\sin^2\theta\right)\dot{\theta}^2\frac{dm}{d\ell}d\ell \\ &= \frac{1}{2}\frac{m}{L}\left(\frac{L^3}{3} + L^3\sin^2\theta - L^3\sin^2\theta\right)\dot{\theta}^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{mL^2}{3}\right)\dot{\theta}^2\end{aligned}$$

Potevamo anche scrivere direttamente

$$K = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\dot{\theta}^2$$

ottenendo lo stesso risultato. In effetti il centro di massa si trova il $\ell = L/2$, quindi

$$v_{cm}^2 = \frac{L^2}{4}\dot{\theta}^2$$

e il momento di inerzia della sbarra rispetto ad un asse passante per esso vale

$$\begin{aligned}I_{cm} &= \frac{m}{L}\int_{-L/2}^{L/2}\ell^2 d\ell \\ &= \frac{m}{L}\frac{2}{3}\left(\frac{L}{2}\right)^3 = m\frac{L^2}{12}\end{aligned}$$

Quindi

$$K = \frac{1}{2}m\frac{L^2}{4}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\frac{L^2}{12}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}m\frac{L^2}{3}\dot{\theta}^2$$

Aggiungendo l'energia potenziale abbiamo infine

$$E = \frac{1}{2}\left(\frac{mL^2}{3}\right)\dot{\theta}^2 + mg\frac{L}{2}\cos\theta$$

Trovare la posizione del centro di rotazione istantaneo Per trovare il centro istantaneo di rotazione osserviamo che per un punto qualsiasi del corpo rigido deve valere

$$\vec{v} = \vec{\omega}\wedge\vec{r}$$

dove $\vec{r}$ è la separazione tra il punto e l'asse di rotazione. Quindi dato che l'estremo superiore della barra si muove solo in direzione y il centro di rotazione deve appartenere alla retta parallela all'asse x passante per esso,

$$y_o = L\cos\theta$$

e allo stesso modo, dato che l'estremo inferiore si muove solo in direzione x, deve essere

$$y_o = L\sin\theta$$

Come verifica, scriviamo l'energia cinetica nella forma

$$K = \frac{1}{2}I_o\dot{\theta}^2$$

Usando il teorema di Steiner abbiamo

$$\begin{aligned} I_o &= I_{cm} + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 \\ &= m\frac{L^2}{12} + m\frac{L^2}{4} = m\frac{L^2}{3} \end{aligned}$$

e vediamo che otteniamo nuovamente l'energia scritta precedentemente. Notare che al variare di θ il centro di rotazione si muove sul quarto della circonferenza

$$x_o^2 + y_o^2 = L^2$$

compresa nel primo quadrante.

Determinare la velocità delle estremità dell'asta al momento dell'arrivo a terra Questo accade per $\theta = \pi/2$. Usando la conservazione dell'energia possiamo scrivere

$$\frac{1}{2}I_o\dot{\theta}^2 = mg\frac{L}{2}\cos\theta_0$$

e quindi

$$\dot{\theta}_f = \sqrt{\frac{mgL}{I_0}\cos\theta_0}$$

L'estremo superiore ($\ell = 0$) si muove quindi con velocità

$$\begin{aligned} \dot{x}(0) &= 0 \\ \dot{y}(0) &= -L\dot{\theta}_f \end{aligned}$$

e quello inferiore ($\ell = L$)

$$\begin{aligned} \dot{x}(L) &= 0 \\ \dot{y}(L) &= 0 \end{aligned}$$

è fermo.

Determinare se e per quale angolo la sbarra si stacca dalla parete
L'unica forza orizzontale che agisce sulla sbarra è la reazione della parete. Chiaramente

$$N_x = m\ddot{x}_{cm}$$

e si avrà distacco se $N_x \leq 0$. Derivando $\dot{x}_{cm}$ abbiamo

$$\ddot{x}_{cm} = \frac{L}{2}\left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta\right)$$

e dalla conservazione dell'energia otteniamo

$$\dot{\theta}^2 = \frac{mgL}{I_0}\left(\cos\theta_0 - \cos\theta\right)$$

Derivando ancora quest'espressione rispetto al tempo abbiamo

$$\ddot{\theta} = \frac{mgL}{2I_0}\sin\theta$$

e sostituendo otteniamo

$$N_x = m\frac{L}{4}\frac{mgL}{I_0}\left[3\cos\theta - 2\cos\theta_0\right]\sin\theta$$

che si annulla per

$$\cos\theta = \frac{2}{3}\cos\theta_0$$