Corso di Laurea Triennale in FISICA

Corso ASTROFISICA I

Problemi di Meccanica Celeste — Appelli del 2006

1° Appello — 12.06.06

[Non disponibile]

2° Appello — 28.06.06

Un sistema binario è costituito da due stelle in orbita circolare attorno ad un punto posto rispettivamente a 1/3 e 2/3 della distanza fra le stelle.

- Calcolare l'energia cinetica e l'energia totale verificando esplicitamente la relazione $E = -T$

3° Appello — 25.07.06

Un pianeta orbita a 100 UA di distanza dal Sole.

i) Stimare l'entità del moto apparente sulla sfera celeste dovuto a
   a) parallasse diurna,
   b) moto proprio,
   c) parallasse annua.

ii) Quale dei tre effetti domina?

iii) Come dovremmo programmare le osservazioni per scoprirne la natura planetaria?

4° Appello — 5.09.06

I satelliti usati nel sistema GPS ruotano su un'orbita circolare inclinata di circa 55° rispetto al piano equatoriale terrestre, percorrendo circa due giri al giorno.

i) Determinarne la quota sulla superficie terrestre e l'energia totale per unità di massa trascurando lo schiacciamento terrestre.

ii) Quale effetto sulle orbite avrebbe lo schiacciamento terrestre? (discuterlo in modo qualitativo e sintetico)

5° Appello — 19.09.06

Un satellite artificiale si sta muovendo su un'orbita circolare con velocità v_0 (in un sistema di riferimento geocentrico) quando un'esplosione imprevista lo divide in due parti; si assuma che la massa delle due parti sia uguale, trascurando i frammenti minori. Una delle due parti viene lanciata con velocità v_1 perpendicolarmente alla superficie terrestre.

i) Mostrare che la seconda parte si allontana indefinitamente dalla Terra e determinarne la velocità finale, ignorando qualunque interazione con altri corpi celesti.

ii) Discutere – solo qualitativamente – che cosa potrebbe accadere se la prima parte fosse lanciata in direzione opposta a quella detta sopra.

6° Appello — 8.01.07

Due corpi sono in rotazione uniforme uno rispetto all'altro alla distanza (costante) a_0. Sapendo che

- il punto di Lagrange L_1 si trova a $3a_0/4$ dal corpo di massa maggiore,
- la massa del corpo minore è pari a quella della Terra M_T,
- la distanza $a_0 = 2r$ essendo r la distanza Terra–Luna,

calcolare:

i) il periodo di rotazione dei due corpi, espresso in mesi (siderali) lunari;

ii) il potenziale gravitazionale nel centro di massa del sistema, espresso in unit' di v_L^2 essendo v_L la velocita orbitale della Luna rispetto alla Terra.

Nota: Trascurare la massa della Luna rispetto a quella della Terra ed evitare di UTILIZZARE ALTRE COSTANTI.

7° Appello — 25.01.07

Trattando le orbite come circolari e complanari si osserva che due opposizioni (∗) successive di Giove avvengono ogni 1.092 anni (questo intervallo si chiama periodo sinodico).

i) Senza usare altri dati, ricavarne il raggio dell'orbita di Giove in unità astronomiche.

Trascurando ancora l'eccentricità dell'orbita della Terra ma non quella di Giove pari a 0.05 circa, ci si deve aspettare che il periodo sinodico vari nel tempo.

ii) Stimare il valore massimo del periodo sinodico e dopo quanto tempo esso raggiunge il valore minimo.

(*) Cioè quando Sole-Terra-Giove sono allineati.

8° Appello — 11.04.07 (straordinario)

Si vuole studiare il moto di una cometa su una particolare orbita kepleriana (imperturbata): quella parabolica. Si supponga che il moto sia sul piano dell'orbita della Terra (che sarà trattata come circolare di raggio a) e che intersechi questa in due punti diametralmente opposti.

i) Mostrare che la distanza al perielio è pari a mezza unità astronomica. Si calcoli la velocità della cometa al perielio, e si esprima il momento angolare specifico (cioè per unità di massa) in unità di quello terrestre.

ii) Calcolare in quanti giorni la cometa percorre il tratto di orbita interno a quello della Terra.

Corso di Laurea Triennale in FISICA

Corso ASTROFISICA I

Problemi di Meccanica Celeste — Appelli del 2007

1° Appello — 5.06.07

Un pianeta X viene osservato da un punto del suo piano equatoriale a (grande) distanza $D = 383\,d$ essendo d la distanza media Terra-Luna. Un satellite del pianeta ruota sullo stesso piano con un periodo $T = 1.7\,\text{mesi}$, ed un'elongazione (distanza angolare) massima pari a $\pm\alpha = 0.2°$ (simmetrica); tuttavia i tempi impiegati per passare dalla massima elongazione orientale a quella occidentale e viceversa sono diversi e in rapporto 1:2 tra loro.

Determinare:

i) il semiasse e l'eccentricità dell'orbita del satellite;

ii) la massa del pianeta, in unità di massa terrestre.

2° Appello — 25.06.07

Trattando l'orbita di Giove come circolare di raggio 5.2 UA e posta sul piano dell'eclittica, si consideri una cometa periodica, con periodo di 71.4 anni, la cui orbita è nello stesso piano e per la quale il passaggio al perielio avviene ad una distanza di 3.44 UA dal Sole.

Dopo un incontro ravvicinato con Giove si osserva che il periodo della cometa non è variato, ma il piano dell'orbita risulta inclinato di 20° rispetto a quello dell'eclittica

i) Determinare la distanza della cometa all'afelio prima dell'incontro ravvicinato con Giove.

ii) Determinare la distanza della cometa all'afelio dopo l'incontro.

3° Appello — 16.07.07

Due stelle formano un sistema binario in rotazione con periodo $T = 2\,\text{anni}$. Nel riferimento (inerziale) del centro di massa la velocit di ogni stella è $v_0 = 30\,\text{km/s}$. Un pianeta, di massa m molto minore di quella delle stelle, orbita mantenendosi nel punto di Lagrange L_4 del sistema.

i) Determinare la distanza tra le due stelle e la massa M di ciascuna stella.

ii) Determinare il rapporto tra energia cineticae modulo dell'enegia potenziale del pianeta (essendo l'energia potenziale nulla quando la distanza tra pianeta e stella tende all'infinito).

4° Appello — 12.09.07

Si consideri una cometa la cui orbita interseca quella della Terra (supposta circolare di raggio R) in due punti diametralmente opposti; il perielio della cometa è nel punto medio dell'arco di orbita compreso tra questi due punti e le due orbite sono complanari. La cometa raggiunge il perielio nello stesso momento in cui è in congiunzione con il Sole, vista dalla Terra; sia D la distanza tra Terra e cometa in questo istante.

i) Caratterizzare il tipo di orbita della cometa in funzione di D.

ii) Nel caso $D = 0.4\,\mathrm{UA}$, determinare dopo quanti giorni dal passaggio al perielio la cometa attraversa l'orbita terrestre.

5° Appello — 17.12.07

Un satellite artificiale – in orbita circolare con periodo $T_0 = 22^{\mathrm{h}}$ – impatta "frontalmente" con un meteorite che si muove rispetto al satellite con velocità tripla di quella del satellite intorno alla Terra (il riferimento della Terra sia inerziale). Si faccia l'ipotesi (in vero poco realistica!) che il meteorite penetri nel satellite e che l'urto sia completamente anelastico.

i) Dire che tipo di orbita percorreva il meteorite prima dell'impatto e calcolarne l'eccentricità.

Suggerimento: esprimere la costante k^2 in termini di velocità e raggio dell'orbita circolare.

Risolvere poi uno dei due quesiti seguenti a scelta:

ii/a) Detti T_0 e v_0 il periodo e la velocità di un corpo in un'orbita circolare attorno alla Terra, e detti T e v il periodo e la velocità minima su un'orbita ellittica tangente in apogeo a quella circolare, dimostrare che vale la relazione:

$$(T_0/T)^2 = [2 - (v/v_0)^2]^3$$

ii/b) Sapendo che la massa del meteorite è metà di quella del satellite, stimare in quanto tempo il satellite cade a Terra, trascurando il raggio della Terra rispetto alla distanza iniziale (ovvero trattando la Terra come puntiforme).

NOTA: Non è necessario conoscere il valore numerico di alcuna costante.

6° Appello — 14.01.08

Gli elementi orbitali della cometa di Halley – riferiti al piano dell'orbita della Terra (eclittica) e alla direzione del punto γ (∗) – sono i seguenti:

Semiasse maggiore	$a = 17.8\,\mathrm{UA}$
Eccentricità	$e = 0.967$
Inclinazione (∗∗)	$i = 162°$
Long. del nodo asc.	$\psi(\Omega) = 58°$
Argomento del perielio	$\chi(\omega) = 112°$
Ultimo pass. al perielio	$t_0 = 9/2/1986$

i) A che distanza dall'orbita della Terra la cometa di Halley attraversa il piano dell'eclittica, prima e dopo il passaggio al perielio?

ii) Dire come si calcola la distanza della cometa dalla Terra negli stessi due istanti (quindi non è richiesto il calcolo esplicito).

NOTE: Si tratti l'orbita della Terra come circolare.

(∗) La direzione del punto γ è quella in cui appare il Sole all'equinozio di primavera, ossia intorno al 20 marzo.

(∗∗) L'inclinazione è l'angolo tra i vettori "momento angolare" della cometa e della Terra.

7° Appello — 04.02.08

Un satellite ruota attorno alla Terra su un'orbita ellittica di semiassi noti: a e $b = (\sqrt{3}/2)\,a$.

i) Determinare – *usando grandezze e relazioni di meccanica celeste!* – i valori massimo e minimo del raggio di curvatura dell'orbita (∗).

ii) Per a uguale al semiasse dell'orbita della Luna, in quanti giorni, a partire dal passaggio al perigeo, il satellite percorre un quarto della sua orbita?

NOTE: Un mese (siderale) lunare è di 29.5 giorni circa.

(∗) Ricordare che il raggio di curvatura di una traiettoria si può ricavare per via dinamica approssimando il moto istantaneo con un moto circolare.

Corso di Laurea Triennale in FISICA

Corso ASTROFISICA I

Problemi di Meccanica Celeste — Appelli del 2008

1° Appello — 11.06.08

La minima distanza di una cometa dal Sole è pari a $q = 1.39\,\mathrm{UA}$ mentre i due punti dell'orbita diametralmente opposti (simmetrici) rispetto al Sole distano tra loro $4q$. Si osserva inoltre che nel momento del passaggio al perielio la cometa – vista da Terra – è in opposizione al Sole.

Si vogliono programmare osservazioni della cometa tra il passaggio al perielio e il momento in cui la distanza dal Sole è pari a 5 volte q.

Si calcoli:

i) L'eccentricità dell'orbita.

ii) Lo spostamento angolare giornaliero (moto proprio), misurato da Terra, al momento del passaggio al perielio.

iii) Si descriva in dettaglio (senza necessariamente eseguire i calcoli) come si ottiene la durata complessiva delle osservazioni programmate.

2° Appello — 1.07.08

Si vorrebbe porre un satellite in orbita attorno alla Luna, "stazionario" rispetto a questa, cioè tale da apparire fermo, visto dalla Luna *(dovrebbe chiamarsi "selenostazionario" in analogia a "geostazionario".)*

i) A che distanza dalla Luna dovrebbe orbitare il satellite, se si potessero trascurare gli effetti gravitazionali della Terra e del Sole?

ii) Quale dei due effetti è più importante?

iii) Considerando solo la perturbazione più importante delle due, e supponendo che se questa fosse inferiore all'1 % della forza gravitazionale della Luna sul satellite, allora sarebbe tollerabile, dire se si può progettare il satellite "*selenostazionario*".

3° Appello — 21.07.08

Una cometa si muove nello stesso piano dell'orbita di Giove che verrà supposta circolare di raggio $a_0 = 5.2\,\mathrm{UA}$ trascurandone anche l'angolo di inclinazione sull'eclittica.

Al perielio la longitudine eclittica (*) della cometa è $\lambda_0 = 27°$ mentre la distanza dal Sole è $q = 2.2\,\mathrm{UA}$; la longitudine del punto P di minima distanza (intersezione) delle orbite dopo il perielio è $\lambda_\mathrm{P} = 162°$.

i) Determinare il semiasse maggiore della cometa.

La cometa raggiunge il punto di minima distanza proprio insieme a Giove, cosicché la sua orbita risulta notevolmente perturbata, pur rimanendo complanare a quella di Giove: il periodo aumenta del 12 %.

ii) Di quanto varia la longitudine del perielio?

NOTA: prima di svolgere i calcoli numerici delineare con chiarezza e sinteticamente la traccia di soluzione.

4° Appello — 9.09.08

Un satellite viene lanciato in modo da occupare una posizione geostazionaria allo zenit di una data località sull'equatore della Terra. Per un errore nelle manovre il satellite invece appare oscillare in direzione Est–Ovest con un'ampiezza α_0 di circa 5° attorno alla posizione corretta.

i) Stimare l'eccentricità dell'orbita del satellite (nell'ipotesi di *piccola eccentricità*.)

Suggerimento: esprimere $\alpha(t)$ in funzione dell'anomalia eccentrica.

ii) Dire se il moto in verso diretto (da ovest verso est) e quello in verso retrogrado (da est verso ovest) hanno la stessa durata oppure dire quale dura di più stimando di quanto.

iii) Si vuole correggere l'orbita con una singola manovra impulsiva (accensione di razzi di durata molto breve rispetto al periodo): discutere qualitativamente in quale istante va effettuata la manovra e se la manovra consente di portare il satellite nella posizione programmata.

(*) Si tratta della coordinata angolare nel piano dell'eclittica, assumendo come centro il Sole e come origine la direzione del punto γ.

5° Appello — 12.01.09

Si considerino due corpi che orbitano attorno ad un primario (di massa molto maggiore) su due orbite, la prima circolare e l'altra ellittica tangente alla prima nel pericentro. Sia v_0 la velocità del corpo in orbita circolare e v quella al pericentro del secondo corpo.

i) Si dimostri che detti R ed a rispettivamente il raggio della prima orbita e il semiasse maggiore della seconda, vale la relazione

$$a = \frac{R}{2 - (v/v_0)^2}$$

La notte del 12 gennaio 2009 viene osservato un asteroide che passando al perielio si trova a brevissima distanza dalla Terra; l'asteroide è all'opposizione e mentre attraversa velocemente il piano dell'orbita terrestre (p. dell'eclittica) ne viene misurata la distanza d e il moto proprio apparente μ.

$$\begin{aligned} d &= 0.1\,\mathrm{UA} \quad \text{(si trascuri rispetto a 1 UA)} \\ \mu_\lambda &= 0.824\,^\circ/\mathrm{h} \quad \text{(in longitudine, cioè lungo il piano dell'eclittica)} \\ \mu_\beta &= 1.65\,^\circ/\mathrm{h} \quad \text{(in latitudine, verso il polo nord)} \end{aligned}$$

ii) Stimare gli elementi orbitali dell'asteroide nel riferimento eclittico e il periodo di rivoluzione.

6° Appello — 3.02.09

Una sonda si muove in orbita circolare sul piano equatoriale di un corpo celeste approssimativamente sferico (per esempio un pianetino), in un periodo di circa 140 minuti.

i) Dalla sola conoscenza del periodo di rivoluzione che informazione e che limitazione (superiore o inferiore?) si può ricavare circa la densità media del primario?

Il raggio dell'orbita sia pari a $1.2\,R$ essendo R il raggio equatoriale del corpo. Con un'accensione breve (istantanea) dei motori di apogeo il modulo v della velocità della sonda viene aumentato di $\Delta v \ll v$. Successivamente il controllo prolungato dell'orbita della sonda mostra che il pericentro presenta un moto retrogrado completando un giro ogni 900 rivoluzioni circa.

ii) Stimare il coefficiente $\mathcal{J}_2$ del primario e dire se esso è schiacciato o allungato.

iii) Dare una stima della densità media del primario (tenendo conto che $\mathcal{J}_2 \neq 0$).

Corso di Laurea Triennale in FISICA

Corso ASTROFISICA I

Problemi di Meccanica Celeste — Appelli del 2009

1° Appello — 10.06.09

La Stazione Spaziale Internazionale (ISS), una struttura complessa di circa 280 tonnellate di massa che opera in orbita bassa attorno alla Terra, può essere osservata – in condizioni favorevoli – la sera dopo il tramonto. Un osservatore che la vede passare al proprio Zenit misura il tempo di transito: la stazione rimane ad un'altezza sull'orizzonte maggiore di 45° per circa 1.7 minuti.

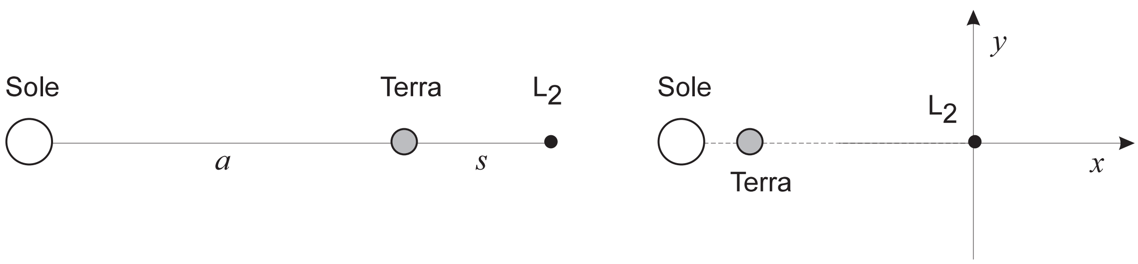
i) Stimare l'altezza dell'orbita – approssimativamente circolare – sulla superficie terrestre, sapendo che i satelliti geostazionari sono a circa 3.58×10^4 km dalla superficie della Terra (il cui raggio è circa 6.4×10^3 km).

A causa della residua atmosfera all'altezza della stazione, questa viene frenata e si osserva che in un giro perde circa 10 m di quota (mantenendo l'orbita circolare).

ii) Stimare la perdita di energia per ogni orbita e il valor medio della forza frenante, dovuta all'atmosfera, sulla stazione.

21° Appello — 01.07.09

Il 14 maggio 2009 un razzo Arianne-4 ha portato nello spazio una coppia di sonde (*Herschel* e *Planck*) destinate a fare osservazioni nell'IR rimanendo ad orbitare intorno al punto L_2 del sistema Terra-Sole, come mostrato in figura a sinistra (NON in scala!).



i) Stimare la distanza s, sapendo che $a = 1.5 \times 10^8$ km e $\mu = M_\mathrm{T}/M_\odot \approx 3.3 \times 10^{-6}$.

(Suggerimento: per una stima all'1 %, è sufficiente considerare, nell'equazione risolutiva, solo i termini di ordine più elevato in a.)

Si consideri ora il sistema di coordinate (x, y) della figura a destra – solidale con Sole e Terra – e si faccia l'ipotesi che una sonda venga lasciata ferma nel punto $(0, y_0)$.

ii) Dopo aver rappresentato schematicamente le linee del campo di forze cui è soggetta una sonda spaziale che si trovi ferma in un intorno (piccolo) di L_2, si dica che forza occorre applicare alla sonda perché il moto sia periodico, cioè tale da far tornare la sonda ferma nello stesso punto (trascurando ovviamente ogni effetto perturbativo). *(È richiesta quanto meno una descrizione qualitativa dettagliata.)*

3° Appello — 22.07.09

Un pianeta di massa m orbita attorno ad una stella di massa $M \gg m$. Si dimostra che la velocità orbitale del pianeta può essere descritta come

$$\vec{V}(t) = \vec{V}_0 + \vec{V}_1(t)$$

dove $\vec{V}_0$ è un vettore costante e $\vec{V}_1(t)$ un secondo vettore di modulo V_1 costante, la cui direzione si mantiene perpendicolare a quella del raggio vettore $\vec{r}(t)$.

i) Mostrare che deve essere $V_0 < V_1$ e indicare la direzione del vettore costante $\vec{V}_0$.

ii) Determinare l'eccentricità e il semiasse dell'orbita del pianeta in termini di V_0, V_1 e $k^2 = GM$.

iii) Calcolare il valor medio temporale del vettore $\vec{V}_1(t)$.

4° Appello — 14.09.09

Si vuole lanciare una sonda verso Saturno, facendole seguire un'orbita, nel campo gravitazionale del Sole, che sia (praticamente) tangente a quelle della Terra ($a_\mathrm{T} = 1\,\mathrm{UA}$) e di Saturno ($a_\mathrm{S} = 9.5\,\mathrm{UA}$) considerate circolari.

i) Determinare la minima velocità relativa alla Terra al momento della partenza e il tempo necessario per raggiungere Saturno.

Per un errore nella pianificazione della missione non ci si è accorti che la sonda ha un incontro ravvicinato con Giove ($a_\mathrm{G} = 5.2\,\mathrm{UA}$) a seguito del quale la sua orbita risulta inclinata di $12°$ sul piano iniziale, mentre il semiasse maggiore non è cambiato.

ii) Dire di quanto varia, in percentuale, l'eccentricità dell'orbita e dare una stima della distanza minima da Saturno raggiunta dalla sonda.

Trattare tutte le orbite come complanati e trascurare in ogni caso l'interazione gravitazionale della sonda con la Terra e con Saturno. La velocità orbitale della Terra è circa $30\,\mathrm{km/s}$.

5° Appello — 18.01.10

Le osservazioni di una cometa portano a determinarne l'orbita come parabolica. Una particolare osservazione mostra che si sta muovendo a velocità $\vec{v}$ di cui si determina il modulo v e la direzione che forma un angolo θ con la congiungente Cometa–Sole.

i) Si esprima la distanza dal Sole cui si trova la cometa nello stesso istante.

ii) Si determini la distanza della cometa dal Sole al perielio.

iii) Si valuti il tempo che impiega la cometa a raggiungere il perielio nel caso particolare in cui $v = 20\,\mathrm{km/s}$, $\theta = 45°$, utilizzando solo il fatto che la terra si muove su un'orbita (con buona approssimazione) circolare di raggio $a = 1\,\mathrm{A}$ alla velocità $V_\mathrm{T} = 30\,\mathrm{km/s}$.

6° Appello — 09.02.10

Una sonda di massa M è in orbita circolare attorno alla Terra alle velocità v_0, seguita sulla stessa orbita da un modulo di rifornimento di massa $m = \eta\, M$ che, con opportuni motori, dovrebbe effettuare un attracco a velocità relativa $v_\mathrm{r} \approx 0$.

Tuttavia, per un errore di programmazione [:-)], la spinta finale del motore dà al modulo una velocità relativa $v_\mathrm{r} = v_0$; a seguito dell'urto i due oggetti restano comunque agganciati.

i) Mostrare che la variazione relativa del periodo dell'orbita, a seguito dell'urto, è pari a 3η (al prim'ordine in η).

ii) Determinare l'eccentricità dell'orbita dopo l'urto (sempre al prim'ordine in η).

iii) Calcolare la distanza di apogeo (dopo l'urto) se $\eta = 1/20$; $v_0 = 6\,\mathrm{km/s}$.

Suggerimenti: Indicare con μ la generica massa orbitante ($\mu \ll M_\mathrm{T}$) ed esprimere $k^2 = GM_\mathrm{T}$ in termini di velocità e distanza iniziali. Per il calcolo numerico ricordare che un satellite geostazionario orbita a circa $4.2 \times 10^4\,\mathrm{km}$ dal centro della Terra.