U. Penco (Rev. Maggio 2010)

Dati:

$M_{\rm S}$	$2.0 \times 10^{30}\,{\rm kg}$	
$M_{\rm T} = M$	$6.0 \times 10^{24}\,{\rm kg}$	$M_{\rm S}/M \approx 3.3 \times 10^5$
$M_{\rm L} = m$	$7.4 \times 10^{22}\,{\rm kg}$	$M/m \approx 81$
$R_{\rm S}$	$7.0 \times 10^5\,{\rm km}$	
$R_{\rm T}$	$6.4 \times 10^3\,{\rm km}$	$R_{\rm S}/R_{\rm T} \approx 110$
$R_{\rm L}$	$1.7 \times 10^3\,{\rm km}$	$R_{\rm T}/R_{\rm L} \approx 3.7$
$D_{\rm ST} = D$	$1.5 \times 10^8\,{\rm km}$	$2R_{\rm S}/D \approx 1/107 \equiv 32'$
$D_{\rm TL} = d$	$3.8 \times 10^5\,{\rm km}$	$2R_{\rm L}/d \approx 1/111 \equiv 31'$
		$D/d \approx 389$

Rapporto delle forze di attrazione di Sole e Terra sulla Luna (in modulo):

$$\frac{F_\odot}{F_{\rm T}} \approx \frac{GM_{\rm S}m}{D^2}\frac{d^2}{GMm} = \frac{M_{\rm S}}{M}\left(\frac{d}{D}\right)^2 \approx 2$$

Ne segue che l'orbita della Luna attorno al Sole è sempre convessa !!!

Nel sistema di riferimento (non inerziale) del $\mathrm{CM_{TL}}$ occorre aggiungere la forza d'inerzia. In termini di campo, occorre sottrarre il campo calcolato nel CM. Il residuo è detto *Campo delle Forze di Marea.*

Forze di marea:

Sia z l'asse della congiungente Terra-Sole con il CM (o la Terra in approssimazione zero) nell'origine e il Sole in z_0; x un asse ortogonale (per simmetria equivale all'asse y).

Il campo di gravitazione del Sole nell'origine

$$\vec{g}_0 = -GM_{\rm S}\frac{\vec{r}_0}{r_0^3} = GM_{\rm S}\frac{1}{z_0^2}\,\hat{k} = g_0\,\hat{k} \quad \text{essendo} \quad \vec{r}_0 = -z_0\,\hat{k} \quad \text{e} \quad g_0 = \frac{GM_{\rm S}}{z_0^2}$$

e in un punto del piano (x, z), posto $\vec{r} = x\,\hat{\imath} + (z - z_0)\,\hat{k}$,

$$\vec{g}(x,z) = -GM_{\rm S}\frac{\vec{r}}{r^3} = -g_0 z_0^2 \frac{x\,\hat{\imath} + (z-z_0)\,\hat{k}}{[x^2 + (z-z_0)^2]^{3/2}}$$

In un intorno dell'origine, sviluppando al prim'ordine in x e z

$$\vec{g}(x,z) = \vec{g}_0 + \left(\left.\frac{\partial g_x}{\partial x}\right|_0 x + \left.\frac{\partial g_x}{\partial z}\right|_0 z \right)\hat{\imath} + \left(\left.\frac{\partial g_z}{\partial x}\right|_0 x + \left.\frac{\partial g_z}{\partial z}\right|_0 z \right)\hat{k}$$

con

$$\begin{cases} g_x(x,z) = -g_0 z_0^2 \dfrac{x}{[x^2 + (z-z_0)^2]^{3/2}} = -\dfrac{g_0 z_0^2}{r^3(x,z)}x \\[2ex] g_z(x,z) = -g_0 z_0^2 \dfrac{(z-z_0)}{[x^2 + (z-z_0)^2]^{3/2}} = -\dfrac{g_0 z_0^2}{r^3(x,z)}(z-z_0) \end{cases}$$

Preliminarmente si calcola

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r^3}\right) = -3\frac{1}{r^4}\frac{\partial r}{\partial x} = -3\frac{1}{r^4}\frac{1}{2}\frac{2x}{r} = -3\frac{x}{r^5} \qquad r = \left[x^2 + (z-z_0)^2\right]^{1/2}$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r^3}\right) = -3\frac{1}{r^4}\frac{\partial r}{\partial z} = -3\frac{1}{r^4}\frac{1}{2}\frac{2(z-z_0)}{r} = -3\frac{z-z_0}{r^5}$$

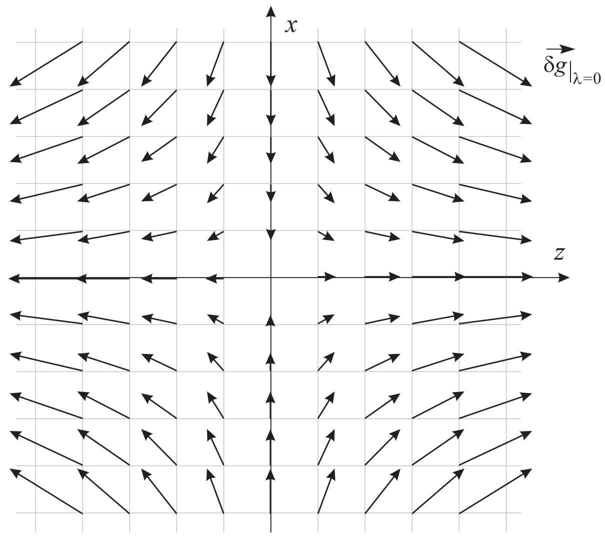
da cui

$$\frac{\partial g_x}{\partial x} = -g_0 z_0^2\left(\frac{1}{r^3} - 3\frac{x^2}{r^5}\right) = -g_0 z_0^2\,\frac{-2x^2+(z-z_0)^2}{r^5} \qquad \left.\frac{\partial g_x}{\partial x}\right|_0 = -g_0\frac{1}{z_0}$$
$$\frac{\partial g_x}{\partial z} = -g_0 z_0^2\left(-3x\,\frac{z-z_0}{r^5}\right) = -g_0 z_0^2\,\frac{-3x\,(z-z_0)}{r^5} \qquad \left.\frac{\partial g_x}{\partial z}\right|_0 = 0$$
$$\frac{\partial g_z}{\partial x} = -g_0 z_0^2\left(-3x\,\frac{z-z_0}{r^5}\right) = -g_0 z_0^2\,\frac{-3x\,(z-z_0)}{r^5} \qquad \left.\frac{\partial g_z}{\partial x}\right|_0 = 0$$
$$\frac{\partial g_z}{\partial z} = -g_0 z_0^2\left(\frac{1}{r^3} - 3\frac{(z-z_0)^2}{r^5}\right) = -g_0 z_0^2\,\frac{x^2-2(z-z_0)^2}{r^5} \qquad \left.\frac{\partial g_z}{\partial z}\right|_0 = 2g_0\frac{1}{z_0}$$

Calcolando le derivate nell'origine si ha infine il campo delle forze di marea; tenendo conto anche della componente y si trova

$$\begin{aligned}\vec{\delta g}(x,y,z) &= \vec{g}(x,y,z) - \vec{g}_0 = \\ &= -g_0\frac{x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} - 2z\,\hat{k}}{z_0} = \\ &= -\frac{GM_\mathrm{S}}{r_0^3}\left(x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} - 2z\,\hat{k}\right)\end{aligned}$$

(in figura, supponendo di essere all'equinozio di primavera, $\lambda = 0$ è la longitudine del Sole; notare la dipendenza da $1/r_0^3$)



Cenno alla marea terrestre:

Nonostante che sulla Terra il campo gravitazionale del Sole sia circa 160 volte quello della Luna, la forza di marea dominante è quella della Luna (grazie alla minore distanza), ma quella solare non è trascurabile; il rapporto vale

$$\frac{\vec{\delta g}_\mathrm{L}}{\vec{\delta g}_\odot} = \frac{m}{d^3}\frac{D^3}{M_\mathrm{S}} = \frac{m}{M_\mathrm{S}}\left(\frac{D}{d}\right)^3 \approx 2.3$$

Le maree (teoriche o astronomiche) più elevate si hanno quindi quando Sole e Luna sono all'incirca allineati, cioè in *congiunzione* o in *opposizione* (rispettivamente nella fase di Luna Nuova o di Luna Piena) mentre quelle più basse capitano con Sole e Luna in *quadratura* (Primo e Ultimo Quarto).

Le maree reali sono poi fortemente condizionate dalla distribuzione delle terre emerse e dal fatto che la Terra è in rotazione su se stessa.