Indice

Parte I

Meccanica

Capitolo 1

Analisi dimensionale e stime

$E = mc^2$ può essere giusto, $E = 2mc^2$ pure mentre $E = m/c^2$ no.

Esercizio 1: Pendolo

Si mostri che il periodo di oscillazione di un pendolo non dipende da m.

✍**Soluzione**: Assumendo $T(g, \ell, m)$ si trova $T \sim \sqrt{\ell/g}$ (la formula esatta, nel limite di piccole oscillazioni, è $T = 2\pi\sqrt{l/g}$). Se T dipende anche dall'ampiezza di oscillazione θ non si può più ricavare una formula tramite analisi dimensionale, ma si può sempre concludere che T non dipende da m.

Esercizio 2: Onde del mare

Si assuma che la velocità delle onde del mare dipenda solo da ρ, λ, g (e non dalla altezza dell'onda: assunzione valida se il mare è profondo).

✍**Soluzione**: $v = \sqrt{g\lambda}$ indipendente da ρ. $v < v_L \sim \sqrt{gh}$.

Esercizio 3: Velocità aereo

Un tipico aereo ha superficie alare $S = 100\,\mathrm{m}^2$ e pesa $M = 10^5\,\mathrm{kg}$ e vola nell'atmosfera che ha densità $\rho \sim 0.3\,\mathrm{kg/m}^3$ e $g = 10\,\mathrm{m/s}^2$. A quale velocità deve viaggiare per non cadere?

✍**Soluzione**: [IA temperatura ambiente 22.4 moli occupano $1\,\mathrm{m}^3$. L'aria è costituita all'80% di N_2 (peso molecolare 2×14) ed al 20% da O_2 (peso molecolare 2×16) ed ha peso molecolare 28.96. Quindi a STP (cioè a terra) $\rho = 1.3\,\mathrm{kg/m}^3$]. Siccome ci sono 4 grandezze le tre equazioni dimensionali hanno infinite soluzioni.

	$[S]$	$[\rho]$	$[g]$	$[M]$
spazio	2	−3	1	0
tempo	0	0	−2	0
massa	0	1	0	1

La combinazione $(\rho/MS^{-3/2}) = \rho_{\text{aria}}/\rho_{\text{aereo}} \sim 0.015$ è adimensionale e piccola. Quindi l'analisi dimensionale non fissa completamente $v = S^{1/4}g^{1/2}(\rho/MS^{-3/2})^p$.

Proviamo ad usare un po'di conoscenze fisiche: affinchè l'aereo non cada occorre che $F_{\text{aria}} = gM$. La forza verso l'altro provocata dall'aria potrebbe dipendere da S, ρ, g, v (ma non da M). L'analisi dimensionale la fissa essere uguale a $F_{\text{aria}} = \rho g^x S^{1+x/2} v^{2-2x}$. Quindi si impara che $F_{\text{aria}} \propto \rho$. Ci sono due valori fisicamente sensati di x:

- $x = 1$, cioè $F_{\text{aria}} \propto g$: viene $F_{\text{aria}} \approx \rho g V$, che non è altro che la trascurabilissima forza di Archimede.
- $x = 0$, cioè F_{aria} indipendente da g: viene $F_{\text{aria}} \approx S\rho v^2$.

Quindi $v = \sqrt{gM/S\rho} \sim 180\,\mathrm{m/s} = 650\,\mathrm{km/h}$.

È interessante notare che l'analisi dimensionale dice che la velocità del suono è $v_s(p,\rho) = \sqrt{p/\rho} \sim 300\,\mathrm{m/s}$ (a STP) (è anche la velocità tipica di una molecola), cioè per $p = 1\text{atm} \approx 1\text{bar} = 760\ \text{mmHg} = \rho_{\mathrm{Hg}} g \cdot 0.76\,\mathrm{m} = 10^5\,\mathrm{N/m^2}$ ($\rho_{\mathrm{Hg}} = 13.6\,\mathrm{g/cm^3}$).

Esercizio 4: Idropulitrice

Una idropulitrice spara acqua alla pressione di $p = 100$ bar con portata $P = 10$ litri/minuto. Quanta energia consuma? A quale velocità esce l'acqua? Come funziona un'idropulitrice?

✍**Soluzione**: Ha senso assumere che la *potenza* ($[W] = E/t = ms^2/t^3$) (e non l'energia!) dipenda da P ($[P] = s^3/t$), dalla densità dell'acqua ρ ($[\rho] = m/s^3$) e da p ($[p] = m/st^2$). È ragionevole aspettarsi che $W \propto P$, e magari che $W \propto \rho$. L'analisi dimensionale dice che $W \sim Pp \sim$ kWh (un numero ragionevole: è comparabile alla massima potenza elettrica fornita) [CHECK]. Si può intuire perchè W non dipende dalla densità ρ rispondendo alla seconda domanda: $v^2 \sim p/\rho$.

Nel futuro una proprietà generale (la conservazione dell'energia) permetterà di fissare anche i fattori di ordini uno, $W = \frac{1}{2}Pp$ [CHECK] (in assenza di sprechi). Il tutto senza avere la minima idea di quale sia la risposta alla terza domanda.

Esercizio 5: Penetrazione di un proiettile

Si stimi la distanza alla quale sprofonda nel terreno una proiettile lanciato da un aereo.

✍**Soluzione**: Altre possibili stime: gittata $= v^2/g$, altezza massima $= v^2/2g$.

Se uso come parametro h (l'altezza dalla quale il proiettile viene fatto cadere) l'analisi dimensionale non dice nulla. Se uso la velocità $v = \sqrt{2gh/m}$ al momento dell'impatto con il suolo l'analisi dimensionale fornisce una conclusione sorprendente.

La distanza percorsa potrebbe dipendere da ℓ (lunghezza del proiettile), da S (sezione del proiettile) dalla sua densità ρ_P (quindi $m = \rho V$ e $V = S\ell$ sono già inclusi), dalla densità del mezzo Attraversato ρ_A (ad es. Aria, Acqua, Arena). Non può dipendere invece da g, in quando la forza di gravità è trascurabile rispetto alle forze frenanti in gioco. È facile vedere che *non può dipendere dalla velocità* (unica a contenete T). Il risultato può dipende in modo impredicibile dalla forma $x = \ell(S/\ell^2)^?(\rho_A/\rho_M)^?$. Sapendo che la velocità delle particelle del mezzo spostato è comparabile alla velocità del proiettile, si può dire che esso si ferma dopo spostato una massa di mezzo pari al proprio peso, cio'è $L = \ell\rho_P/\rho_A$.

Questa potrà essere una buona approssimazione (come si può verificare andando in bicicletta e smettendo di pedalarex ma concettualmente è assurdo che lo spazio percorso non dipenda in nessun modo dalla velocità. Ricaviamo la risposta 'esatta'.

Abbiamo già ricavato che l'equazione del moto è $m\ddot{x} = -\rho_A S\dot{x}^2$ (at alte velocità l'attrito lineare è trascurabile), cioè $\dot{v} = -v^2/L$, dove $L = \ell \cdot \rho_P/\rho_A$. Per motivi dimensionali la soluzione sarà circa L. La soluzione esatta è

$$v(t) = \frac{1}{t/L + 1/v_0}, \qquad x(t) = \int_0^t v(t')dt' = L\ln(1 + tv_0/L) \to L\ln\frac{v_0}{v_{\min}}$$

Per questo motivo, in acqua $L \sim 10\ell$ (per cui gli arpioni sono lunghi) ed in aria $L \sim 10000\ell$ (per cui un proiettile lungo un metro può percorrere 10 km (è quindi essenziale avere ρ_P grande, anche a costo di usare materiali tossici...) mentre una pallottola lunga 10 cm dovrebbe fermarsi dopo 100 m, indipendentemente dalla velocità iniziale se è abbastanza grande)

Il fatto che la profondità alla quale proiettili lanciati dall'alto sprofondassero nel suolo non dipenda dalla altezza dalla quale vengono lanciati sorprese esperti militari USA che stavano studiando come evitare che i proiettili sprofondassero prima di esplodere.

Esercizio 6: Costanti fondamentali?

L'energia, la temperatura e la carica sono ulteriori dimensioni?

✍**Soluzione**: L'energia è esprimibile in termini di m, kg, s. La temperatura pure, se uno lo sa (chi ha fatto la termodinamica non lo sapeva!). Se uno non lo sa deve introdurre un ulteriore dimensione, ma anche una ulteriore 'costante fondamentale' $E = k_B T$. Le due possibilità sono due descrizioni diverse della stessa fisica.

La stessa cosa vale per quanto riguarda la carica:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r^2} = \frac{1}{4\pi}\frac{q_1 q_2}{r^2}, \qquad q \equiv Q/\sqrt{\epsilon_0}$$

misurare Q in Coulomb o q in $\mathrm{cm}^{3/2}\,\mathrm{s}^{-1}\,\mathrm{g}^{1/2}$ è equivalente (anche se non egualmente comodo).

A questo punto è naturale immaginare che uno può eliminare la massa definendo $m = \sqrt{GM}$, il tempo con c,...

Le vere costanti fondamentali sono quindi solo le combinazioni adimensionali delle apparenti costanti fondamentali. Sono $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137.036 \ll 1$ ed eventualmente il rapporto fra la forza elettrica fra due elettroni e la forza gravitazionale, $e^2/(G_N m_e^2) = 4.167 \cdot 10^{42}$. $T_{\text{Univ}}/(a_0/c) = 2.6\ 10^{36}$.

$$\begin{aligned}
c &= 2.99792458 \cdot 10^{10}\,\mathrm{cm/s}\\
\hbar &= 1.054572 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{cm}^2\,\mathrm{s}^{-1}\,\mathrm{g}\\
e &= 4.80321 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{cm}^{3/2}\,\mathrm{s}^{-1}\,\mathrm{g}^{1/2}\\
G_N &= 6.672 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}^3\,\mathrm{s}^{-2}\,\mathrm{kg}^{-1}\\
m_e &= 9.109389 \cdot 10^{-28}\,\mathrm{g}\\
T_{\text{Univ}} &= 15\ \text{Gyr} = 4.7\ 10^{17}\,\mathrm{s}
\end{aligned}$$

La temperatura non è una nuova dimensione, ma solo una diversa scala per l'energia ($k_B = R/N_A$). Si può fare a meno del Coulomb con il seguente trucco: $e = q_e/\sqrt{4\pi\epsilon_0}$, in modo che la forza di Coulomb fra due elettroni sia $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_1 q_2/r^2 = e^2/r^2$ ($q_e = 1.60218 \cdot 10^{-19}$Coulomb, $\epsilon_0 = 8.8549 \cdot 10^{-12}\mathrm{Coulomb}^2/\mathrm{Joule\,m}$).

Supponendo che un atomo sia non relativistico $a_0(e, m_e, \hbar) = \hbar^2/(m_e e^2) = 0.529 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{cm} \sim (\mathrm{cm}^3/N_A)^{1/3} = 1.18 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{cm}$. La velocità è infatti $v = e^2/\hbar = e^2/(m_e a_0) = \alpha c$ dove $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137.036 \ll 1$. La sua energia è $Ryd = \frac{1}{2} m_e v^2 = m_e e^4/(2\hbar^2) = 2.18\ 10^{-11}$erg. Un fotone di questa energia ha lunghezza d'onda $\lambda = 2\pi c\hbar/\mathrm{Ryd} = a_0/(\alpha/4\pi) = 9.11 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{cm} = 91\mathrm{nm}$. $\rho_{\text{critica}} = \frac{3}{8\pi} 1/(T_{\text{Univ}}^2 G_N) \approx 10^{-29}\,\mathrm{g/cm}^3$. Raggio di Scharzschild del sole $R = 2G_N M_\odot/c^2 = 2.95\,\mathrm{km}$ ($M_\odot = 1.988 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$).

Esercizio 7: Stime: reazioni nucleari nel sole

Quanto tempo è necessario per preparare un litro di the usando l'energia fornita un kg di sole?

✍**Soluzione**: (Da Gamow pag. 307). Sulla terra, che dista $d = 1.5\ 10^{11}\,\mathrm{m}$ dal sole arrivano $1.3\ 10^3\,\mathrm{J/m^2\,s}$. Cioè il sole emette una potenza $W = 3.85\ 10^{26}\,\mathrm{W}$. L'energia gravitazionale $V = -3GM^2/5R$ durerebbe solo per $\sim 10^7$ anni, mentre il sole esiste da $\sim 10^{10}$ anni. [Kelvin vs Darwin]. Siccome ha massa $M = 2\ 10^{30}\,\mathrm{kg}$, un kg di sole emette una potenza $W_{\mathrm{kg}} = W\,\mathrm{kg}/M = 2\ 10^{-4}\,\mathrm{J}/s$ (contando solo la parte attiva salirebbe a $10^{-2}\,\mathrm{J/sec\,kg}$). Per riscaldare di circa 100 gradi un kg di acqua servono $E = 100\,\mathrm{Kcal} = 10^5\,\mathrm{cal} = 4.2\ 10^5\,\mathrm{J}$, che il sole fornisce in un tempo $t = E/W_{\mathrm{kg}} = 2.2\ 10^9\,\mathrm{sec} = 70\,\mathrm{yr}$.

Per avere un idea di 'quanta potenza è' $P = 10^3\,\mathrm{W}$, è utile notare che è circa la potenza massima sviluppabile da un essere umano di massa $m \approx 80\,\mathrm{kg}$ capace di accelerare da 0 a $v = 10\,\mathrm{m/s}$ in $\Delta t = 2\,\mathrm{s}$. La gara dei 100 metri ed il salto in lungo sono la stessa gara: $L = v^2/g$.

Esercizio 8: Stime: spessore di un nastro

Si stimi lo spessore di un nastro

✍**Soluzione**: Un modo è il seguente: il nastro svolto è lungo $L = 250\,\mathrm{m}$ (3 h); arrotolato forma un rocchetto di raggi $R_{\max} = 4\,\mathrm{cm}$ e $R_{\min} = 1.5\,\mathrm{cm}$, quindi $V = Lsh = \pi(R_{\max}^2 - R_{\text{mix}}^2)h$, da cui $s = 0.017\,\mathrm{mm} = 17\,\mu\mathrm{m} \approx 1.7\ 10^5$ Å (!). Modo alternativo: 3500 giri circa. Il medoto usato da Rayleigh per contare gli atomi è simile.

Esercizio 9: Misura del numero di Avogadro

Nel 1890 Rayleigh trovò che $m = 0.81\,\mathrm{mg}$ di olio di oliva si stendevano su di una superficie d'acqua producendo uno strato mono-molecolare dal diametro di $d = 84\,\mathrm{cm}$. Sapendo che l'olio ha densità $\rho = 0.8\,\mathrm{g/\,cm^3}$, si stimi quanto è grande una molecola di olio? Quante molecole hanno partecpato all'esperimento? Sapendo che la molecola dell'olio ha composizione chimica $H(CH_2)_{18}COOH$ (in catena lineare) si stimi il numero di Avogadro

✍**Soluzione**: (Esercizio preso da Feynman; su testi italiani questo è noto come esperimento di Avogadro).
Il volume e la superficie dell'olio usato sono direttamente misurabili:

$$V = M/\rho \approx Na^3, \qquad S = \pi(d/2)^2 \approx Na^2$$

da cui $a \approx M/\rho S = 18 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{cm}$ e $N = 1.6\ 10^{17}$. Il peso molecolare è $p = 298g$ per cui $N_A \approx Np/M = 6 \cdot 10^{22}$. Contando 10^6 atomi al secondi si impiegherebbe $N_A/(\pi 10^7)/10^6 = 2 \cdot 10^{10}\,\mathrm{yr} \approx T_{\mathrm{universo}}$ per contarne una mole.

Capitolo 2

Vettori

Esercizio 10: Legge di Hubble

Hubble trovò che Galassie lontane si allontanano dalla Terra con veloctà $\mathbf{v}_{GT} = H(\mathbf{r}_H - \mathbf{r}_T)$. Mostrare che, siccome H non dipende da r, questa scoperta non implica che la Terra è nel centro dell'universo.

✍**Soluzione**: Le velocità galattiche osservata da un ossevatore su di un qualunque pianeta P sono

$$\mathbf{v}_{GP} = \mathbf{v}_{GT} - \mathbf{v}_{PT} = H(\mathbf{r}_G - \mathbf{r}_T) - H(\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_T) = H(\mathbf{r}_G - \mathbf{r}_P)$$

cioè viene osservata esattamente la stessa legge di Hubble. In realtà oggi uno può misurare la $\mathbf{v}_{GT}$ che una Galassia aveva al tempo $t_{\text{ora}} - r_{GT}/c$, per cui in pratica le cose sono un po'più complicate.

Esercizio 11: Misura della velocità della luce

Durante una pioggia le goccie formano strisce inclinate di $\theta' = 76°$ rispetto alla verticale sui finestrini di una vettura in moto con velocità $v' = v_A = 100\,\text{km/h}$. Quale è la velocità della pioggia in assenza di vento? Una macchina in moto alla stessa velocità ma in direzione opposta ha strosce inclinate di $\theta'' = 70°$. Quale è la velocità del vento e quella della pioggia?

✍**Soluzione**: Chiamiamo $\mathbf{v}_P$ la velocità della pioggia. In presenza di vento essa ha una componente orizzontale v_V ed una componente verticale v_P. Nel sistema di riferimento della prima macchina in moto con velocità $\mathbf{v}' = (0, v_A = 100\,\text{km/h})$ le goccie di pioggia cadono con velocità

$$\mathbf{v}_P - \mathbf{v}'' = \begin{pmatrix} v_V - v_A \\ v_P \end{pmatrix} \qquad : \qquad v_A - v_V = v_P \tan\theta'$$

Nel sistema di riferimento della seconda macchina in moto con velocità $\mathbf{v}'' = -\mathbf{v}'$ le goccie di pioggia cadono con velocità

$$\mathbf{v}_P - \mathbf{v}'' = \begin{pmatrix} v_V + v_A \\ v_P \end{pmatrix} \qquad : \qquad v_A + v_V = v_P \tan\theta''$$

Da cui

$$v_V = \frac{\tan\theta'' - \tan\theta'}{\tan\theta' + \tan\theta''} v_A = -18.7\frac{\text{km}}{\text{h}}, \qquad v_P = \frac{2v_A}{\tan\theta' + \tan\theta''} v_A = 30\,\text{km/h}$$

v_V è negativo in quanto la prima macchina sta andando controvento (come ovvio dal fatto che ha strisce più inclinate).

La tecnica usata in questo esercizio per misurare la velocità della pioggiaè identico a quella usata da Bradley nel 1728 per *misura della velocità della luce*. Sapendo che la Terra si muove con velocità $v_T = 29.77\,\text{km}/s$, e che la posizione di una stella vicina al polo nord (cioè la direzione della sua luce) vale $\theta' = -\theta'' = 20.5'' = 20.5°/60^2 = 0.9936\;10^{-4}\text{rad}$, approssimando $\tan\theta \approx \theta$ si ottiene $c = v_T/|\theta'| = 299500\,\text{km/s}$. Siccome la velocità della terra è quasi ortogonale alla direzione della luce, le correzioni relativistiche sono trascurabili (verificare).

Esercizio 12: Attraversamento fiume

Un nuotatore, capace di nuotare con velocità $v = 3\,\mathrm{m/s}$ vuole attraversare un fiume largo $L = 10\,\mathrm{m}$ in cui l'acqua scende con velocità $v_C = 4\,\mathrm{m/s}$ partendo $10\,\mathrm{m}$ a monte di una cascata. In quale direzione deve nuotare per attraversare il fiume?

✍**Soluzione**: Se nuotasse ortogonale al fiume ($\varphi = 0$) andrebbe con angolo $\arctan(3/4) < 45°$ e finirebbe nella cascata. Nel miglior caso possibile l'inclinazione è $\varphi = -\arcsin 3/4$: $\varphi = 48.5° > 45°$ e scenderebbe il fiume di $8.82\,\mathrm{m}$ in $5.04\,\mathrm{s}$. Affinchè arrivi sull'altra sponde prima di cadere nella cascata la sua velocità

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_C + v\hat{\varphi} = \begin{pmatrix} v\sin\varphi + v_C \\ v\cos\varphi \end{pmatrix}$$

deve avere $v_y \ge v_x$, cioè

$$\cos\varphi - \sin\varphi = \sqrt{2}\cos(\varphi + 45°) \ge v_C/v$$

cioè $\varphi + 45° = \pm 19°$, cioè $-64.5° < \varphi < -25.5°$. Nei due casi limite il tempo di transito $t = L/(v\cos\varphi)$ varia fra $t = 3.69\,\mathrm{s}$ e $t = 7.73\,\mathrm{s}$.

Esercizio 13: Prodotto scalare

Si verifichi che il prodotto scalare funziona, cioè che è invariante sotto rotazioni

✍**Soluzione**: È possibile scrivere il **prodotto scalare** in termini di lunghezze di vettori: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \frac{1}{2}[(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2 - \mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2] = \sum_i a_i b_i$. Siccome pare ovvio che la lunghezza di un vettore non dipende dalla sua orientazione, abbiamo finito.

Una verifica più esplicita è utile: le componenti di un generico vettore $\mathbf{v} = v_x\mathbf{e}_x + v_y\mathbf{e}_y = v'_x\mathbf{e}'_x + v'_y\mathbf{e}'_y$ (in notazione del corso di geometria: $\mathbf{v} = \mathbf{e}^T v$) in basi divese (legate da una rotazione nel piano (x, y))

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_x &= +\mathbf{e}_x\cos\theta + \mathbf{e}_y\sin\theta \\ \mathbf{e}'_y &= -\mathbf{e}_x\sin\theta + \mathbf{e}_y\cos\theta \end{aligned}$$

sono legate da

$$\begin{aligned} v'_x &= v_x\cos\theta - v_y\sin\theta \\ v'_y &= v_x\sin\theta + v_y\cos\theta \end{aligned}$$

Si verifica che il prodotto scalare $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y = a'_x b'_x + a'_y b'_y$ è invariante sotto rotazioni, cioè è davvero uno scalare. In un sistema in cui un asse è lungo $\mathbf{a}$ si vede che $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = ab_a = ab\cos\theta_{ab}$.

I vettori sono utili per rappresentare simmetrie. In relatività le componenti dei quadri-vettori ruotano trasformano sotto la simmetria di Lorentz SO(3,1) ('trasformazioni di Lorentz'): sarà utile fare uso di quantità invarianti $A\cdot B$ che sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento ('non tutto è relativo').

Esercizio 14: Applicazioni del prodotto scalare

La diagonale del cubo $(1, 1, 1)$ è lunga $\sqrt{3}$; forma un angolo $\cos\theta = 1/\sqrt{3\cdot 1}$ con i lati; forma un angolo $\cos\theta' = \sqrt{2/3}$ con le (diagonali delle) faccie.

✍**Soluzione**:

Esercizio 15: Distanza fra due città

Si calcoli la distanza fra due città di cui sia nota latitudine e longitudine.

✍**Soluzione**: Ad esempio R = Roma, M = Madrid, Y = New York

$$\begin{array}{lll} \theta_R = 90 - 41^o 51' = 0.840 & \theta_M = 90 - 40^o 25' = 0.865 & \theta_Y = 90 - 40^0 42' = 0.860 \\ \varphi_R = 12^o 30' = 0.218 & \varphi_M = -3^o 43' = -0.065 & \varphi_Y = -74^o 0' = -1.29 \end{array}$$

dove occorre saper convertire da gradi-primi a radianti e passare dalla latitudine (zero all'equatore) al θ delle coordinate polari (zero al polo nord).

Usando le coordinate polari

$$\mathbf{e} = (\sin\theta\sin\varphi,\ \sin\theta\cos\varphi,\ \cos\theta)^T \cdot (\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$$

una prima approssimazione potrebbe essere $d = R|\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2|$. Dà $d_{RM} = 0.2139\ R$ e $d_{MY} = 0.87\ R$.

Siccome la terra è sferica la distanza è $R\theta_{12}$. L'angolo relativo θ_{12} si può facilmente calcolare usando i vettori: $\cos\theta_{12} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$ (avendo semplificato $\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = c_1c_2 + s_1s_2$). Quindi $d_{RM} = 0.2143\ R$ (cioè la distanza sulla sfera è 3 km maggiore che in 3d) e $d_{MY} = 0.905\ R$ (200 km più che in 3d).

La traiettoria di minima distanza lungo la sfera è

$$\mathbf{e}(\lambda) = \frac{\lambda\mathbf{e}_M + (1-\lambda)e_Y}{\sqrt{\lambda^2 + (1-\lambda)^2 + 2\lambda(1-\lambda)\mathbf{e}_M \cdot e_Y}},$$

Prendendo la componente z si trova la latiudine durante il viaggio $\cos\theta(\lambda)$. Derivando si può trovare la latitudine estrema, ma è noioso. Siccome Madrid e New York hanno circa la stessa latitudine, la latitudine estrema sarà a $\lambda = 1/2$: vale

$$\cos\theta_{\max} = \cos\theta_{M\approx Y}\sqrt{\frac{2}{1+\cos\theta_{MY}}} = 0.72$$

(verifica: sul cerchio funziona: $\theta_{MR} = 2\theta_{M\approx R}$ e quindi viene $\cos\theta_{\max} = 1$) che è 600 km più a nord di M e Y.

Esercizio 16: Moto sotto la pioggia

Conviene correre per non bagnarsi?

✍**Soluzione**: Il 'flusso' di $\mathbf{v}_p$ attraverso una superfice piatta è $S\mathbf{n}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{n}_S\cdot\mathbf{v}$, dove $\mathbf{n}_S$ è un vettore di lunghezza S ortogonale a S. Approssimando il corpo umano come una superfice orizzontale S_O ed una superficie verticale S_V, la 'somma' delle due superfici è rappresentata dal vettore somma $\mathbf{n} = \mathbf{n}_S + \mathbf{n}_V = S_V\mathbf{e}_x + S_O\mathbf{e}_y$. a velocità della pioggia rispetto ad una persona che cammina orizzontalmente velocità v è $\mathbf{v}'_P = -v\mathbf{e}_x - v_P\mathbf{e}_y$. Quindi la pioggia presa in un tempo $t = L/v$ è $t(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}'_P) \propto S_V + S_Ov_P/v$.

Questo significa che correre fino a $v \sim v_P$ è utile. Siccome $S_V \gg S_O$ non è un gran guadagno. Un cane, che ha $S_O \gg S_V$, si bagna di più se va piano, $v \ll v_P$, ma si bagna di meno se corre $v \gg v_P$.

Esercizio 17: Componente di a ortogonale a v

Si calcoli la componente dell'accelerazione **a** ortogonale alla velocitá **v**

✍**Soluzione**: Servirà nel futuro. Naturalmente potrebbero essere due vettori qualsiasi.

1. Un primo modo è usare la trigonometria: $a_\perp = a\sin\theta$, dove $\cos\theta = \mathbf{a}\cdot\mathbf{v}/av$. Quindi $a_\perp^2 = a^2(1-\cos^2\theta) = a^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})^2/v^2$.

2. Usando i vettori $\mathbf{a}_\perp = \mathbf{a} - \mathbf{a}_= = \mathbf{a} - \mathbf{v}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})/v^2$. Prendendo il modulo $a_\perp^2 = a^2 + (1-2)(\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})^2/v^2$ si ritrova la formula precedente.

3. Se **v** e **a** giacciono entrambi nel piano (x, y), espandendo la formula ricavata ai punti 1. e 2. in componenti e ragruppando si ottiene:

$$a_\perp^2 = a_x^2 + a_y^2 - \frac{v_xa_x + v_ya_y}{v_x^2 + v_y^2} = \frac{a_x^2v_y^2 + a_y^2v_x^2 - 2a_xa_yv_xv_y}{v_x^2+v_y^2} = \frac{(a_xv_y - v_xa_y)^2}{v_x^2+v_y^2}$$

   Abbiamo scoperto il prodotto vettore: $|\sin\theta| = |\mathbf{a}\times\mathbf{v}|/av$. In generale conviene usarlo in questo problema solo se **a** e **v** giacciono in un piano come (x, y): in questo caso il prodotto vettore ha solo una componente.

Esercizio 18: Prodotto vettoriale

Introduzione

✍**Soluzione**: Il **prodotto vettore** è tipico di $d = 3$: a due vettori $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ posso associare un terzo vettore $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ortogonale ad entrambi. La costante di proporzionalità è arbitraria; una volta scelto $\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y$ tutto il resto è fissato. Ad esempio, portando $y \to z$ e quindi $z \to -y$ con una rotazione di 90 gradi attorno all'asse x ottengo $\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_z = -\mathbf{e}_y$.

Portando l'asse $x \to y$ e quindi $y \to -x$ con una rotazione di 90 gradi attorno all'asse z ottengo $\mathbf{e}_y \times (-\mathbf{e}_x) = \mathbf{e}_z$, cio'e scopro che *il prodotto vettore è anti-simmetrico.* Vale la pena di rivedere più precisamente come è fissata questa proprietà non ovvia. Se $\mathbf{e}_z$ è davvero un vettore, allora deve essere invariante sotto rotazioni nel piano x, y:

$$\mathbf{e}'_z = \mathbf{e}'_x \times \mathbf{e}'_y = (\mathbf{e}_x \cos\theta + \mathbf{e}_y \sin\theta) \times (-\mathbf{e}_x \sin\theta + \mathbf{e}_y \cos\theta) = \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y \cos^2\theta - \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_x \sin^2\theta$$

È anche facile verificare che il prodotto vettoriale non è associativo, ad esempio $(\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y) \times \mathbf{e}_y \neq \mathbf{e}_x \times (\mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_y) = 0$. Quindi $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{c} =?$ non ha senso.

Queste proprietà algebriche inusuali spariscono in una trattazione nella quale gli elementi di base sono non i vettori (oggetti composti) ma le loro componenti (numeri normali). In tale trattazioni esistono i *tensori invarianti* $\delta_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$ e $\varepsilon_{ijk} = (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_k$.

I!Oltre alle rotazioni, la **parità** $P\mathbf{v} \equiv -\mathbf{v}$ è una ulteriore simmetria dello spazio (le parità lungo assi particolari, ad esempio P_x, usano direzioni particolari. Possono comunque essere interessanti in situazioni particolari).

Sotto parità ($\mathbf{r} \to -\mathbf{r}$) il prodotto vettore è uno 'pseudovettore': $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \to (-\mathbf{a}) \times (-\mathbf{b}) = +\mathbf{c}$. Per capire cosa significa è utile vedere qualche esempio pratico di pseudovettore. Un esempio è il vettore di rotazione tale che $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$ (stetto parente del momento angolare $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$). Un corpo orizzontale che gira in senso antiorario, sotto parità $P_x P_y P_z$ (basta lo specchio $P_x P_y$) continua a girare nella stessa direzione.

Un secondo esempio di pseudovettore è il campo magnetico $\mathbf{B}$: sotto parità la corrente che lo genera continua a ruotare nella stessa direzione, quindi $\mathbf{B}$ non si ribalta, ed è quindi un pseudovettore. Ciònonostante le interazioni elettromagnetiche sono invarianti sotto parità in quanto la forza di Lorentz è $\mathbf{F} = e(\mathbf{E} = \mathbf{v} \times \mathbf{B})$, dove e è uno scalare. Se la forza di Lorentz contenesse termini come $\mathbf{B}$ o $\mathbf{v} \times \mathbf{E}$ un esperimento darebbe un risultato diverso dalla sua immagine riflessa (cioè lo stesso esperimento fatto da un gemello mancino usando viti destrogire invece che levogire). Comunicando con un ufo capace di eseguire esperimenti elettromagentici è possibile spiegargli quale è la nostra altezza ($17\ 10^9$ atomi di idrogeno) in quanto le leggi della fisica non sono invarianti di scala; ma non dire da che parte è il cuore. Non è possibile dirgli che il cuore è a sinistra, in quanto l'elettromagnetismo non consente di distinguere la 'destra' dalla 'sinistra' (le interazioni deboli si).

Esercizio 19: Esercizi sul prodotto vettoriale

Esercizietti

✍**Soluzione**:

- Esempio di calcolo.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{pmatrix} = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} a_i b_j \mathbf{e}_k$$

  Ad esempio per $\omega = \omega \mathbf{e}_z$ e $\mathbf{r} = d\mathbf{e}_{xy} + z\mathbf{e}_z = d\cos\theta \mathbf{e}_x + d\sin\theta \mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ non dipende da z e vale

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \omega \times \mathbf{r} = \omega(-\sin\theta \mathbf{e}_x + \cos\theta \mathbf{e}_y) = \omega d \mathbf{e}_\theta$$

  Come deve essere $\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} \propto \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_{xy} = 0$.

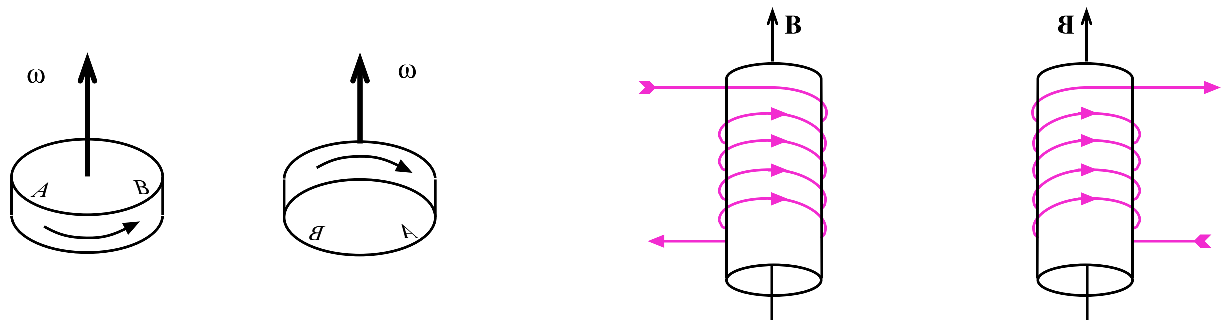


Figura 2.1: *Un corpo e la sua immagine riflessa (e quindi anche una spira) ruotano nella stessa direzione Quindi* ω *e* $\mathbf{B}$ *sono pseudovettori sotto parità. DA CORREGGERE*

- Mostriamo che $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) - \mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$. Di sicuro è scrivibile come $x_a\mathbf{a} + x_b\mathbf{b} + x_c\mathbf{c}$. Siccome è ortogonale ad $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ allora $x_c = 0$ (cioè sta nel piano $\mathbf{a},\mathbf{b}$). Siccome è ortogonale a $\mathbf{c}$ allora è proporzionale a $\mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$. Prendendo un caso semplice si trova che la costante di proporzionalità è uno.

  Naturalmente non ci sarebbe alcun bisogno di fare il conto in modo 'furbo ad hoc', se uno ha la pazienza di espandere in componenti.

  Quindi $\omega\times(\omega\times\mathbf{r}) = \omega(\mathbf{r}\cdot\omega) - \omega^2\mathbf{r} = -\omega^2\mathbf{r}_\perp$.

- semplificare $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot[(\mathbf{b}+\mathbf{c})\times(\mathbf{a}+\mathbf{c})] = 2\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$.

Capitolo 3

Cinematica e coordinate polari

Esercizio 20: Compitino del 12/1/98

Una guida circolare di raggio $r = 0.63\,\mathrm{m}$ ruota in un piano verticale con velocità ancolare costante $\omega = 0.39\,\mathrm{rad/\,s}$ in senso antiorario attorno ad un asse orizzontale passante per il centro. Un corpo puntiforme di massa $m = 2.9\,\mathrm{kg}$ si muove rispetto alla guida con legge oraria $s(t)/\,\mathrm{m} = 2t/\,\mathrm{s} - 3(t/\,\mathrm{s})^2$ con direzione concorde con il senso di rotazione della guida. A $t = 0$ il corpo si trova alla stessa quota del centro. È presente un campo gravitazionale $g = 10\,\mathrm{m/\,s^2}$ diretto verso il basso.

Si calcoli nel sistema di riferimento interziale a $t = 0$

1. Il modulo della velocità del corpo;
2. Il modulo della risultante delle forze applicate al corpo;
3. Il modulo della forza di contatto tra la guida e il corpo.

✍**Soluzione**: Nel sistema di riferimento inerziale il corpo si muove lungo una circonferenza di raggio r con legge oraria $\ell(t) = r \cdot \theta(t) = r(\omega t + s(t)/r)$.

$$\mathbf{x}(t) = r \begin{pmatrix} \cos\theta(t) \\ 0 \\ \sin\theta(t) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} = \dot{\ell} \begin{pmatrix} -\sin\theta(t) \\ 0 \\ +\cos\theta(t) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{a} = \ddot{\mathbf{x}} = -\frac{\dot{\ell}^2}{r} \begin{pmatrix} \cos\theta(t) \\ 0 \\ \sin\theta(t) \end{pmatrix} + \ddot{\ell} \begin{pmatrix} -\sin\theta(t) \\ 0 \\ +\cos\theta(t) \end{pmatrix}$$

dove $v = \dot{\ell}(t) = r\omega + \dot{s}$. Quindi a $t = 0$

$$\mathbf{v} = (r\omega + \dot{s}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} -v^2/r \\ 0 \\ \ddot{s} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}, \qquad \mathbf{F} = m\mathbf{a} = -\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \mathrm{N}$$

La forza totale agente sul corpo è $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_{\text{guida}} + \mathbf{F}_{\text{gravita}}$ ha modulo $F = 29\,\mathrm{N}$. Quindi la guida esercita una forza $\mathbf{F}_{\text{guida}} = \mathbf{F} - \mathbf{F}_{\text{gravita}} = \mathbf{F} - mg0, 0, -1^T = m(-8, 0, 4)^T$ che ha modulo $\mathbf{F}_{\text{guida}} = 25.95\,\mathrm{N}$.

Un secondo modo di risolvere il problema consiste nell'usare le relazioni, valide per un moto generico $\mathbf{x}(\ell(t))$

$$\mathbf{v} = \dot{\ell}\mathbf{e}_T, \qquad \mathbf{a} = \frac{\dot{\ell}^2}{r}\mathbf{e}_N + \ddot{\ell}\mathbf{e}_T$$

Per un moto circolare, introducendo il suffisso $_A$ per indicare che siamo nel sistema di riferimento inerziale ('Assoluto') è possibile scrivere la velocità come $\mathbf{v}_A(t) = \omega_A(t) \times \mathbf{x}$, dove il vettore di rotazione ω_A vale $\omega_A = \dot{\theta}(t)\ (0, -1, 0)^T$ e $\mathbf{x} \perp \omega$. Quindi (semplificando il doppio prodotto vettoriale) $\mathbf{a}_A \equiv \dot{\mathbf{v}}_A = \omega_A \times \mathbf{v}_A + \dot{\omega} \times \mathbf{x} = -\omega_A^2\mathbf{x} + \dot{\omega} \times \mathbf{x}$.

Verifichiamo che le relazioni che collegano le velocità ed accelerazioni nel sistema di riferimento *A*ssoluto con quelle nel sistema *R*elativo R (solidale alla guida che *R*uota con velocità angolare ω)

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_R + \mathbf{v}_{\rm tr}, \qquad \mathbf{a}_A = \mathbf{a}_R + \mathbf{a}_{\rm tr} + \mathbf{a}_{\rm Coriolis}$$

Nel sistema R il punto ruota con velocità angolare $\omega_R = \dot{s}/r(0,-1,0)$, quindi

$$\mathbf{v}_R = \omega_R \times \mathbf{x}, \qquad \mathbf{v}_{\rm tr} = \omega \times \mathbf{x} \qquad : \qquad \mathbf{v}_A = (\omega + \omega_R) \times \mathbf{x} \stackrel{\checkmark}{=} \omega_A \times \mathbf{x}$$

Per le accelerazioni si ha

$$\mathbf{a}_R(t) = \dot{\mathbf{v}}_R = -\omega_R^2 \mathbf{x} + \dot{\omega}_R \times \mathbf{x}, \qquad \mathbf{a}_{\rm tr} = -\omega^2 \mathbf{x}, \qquad \mathbf{a}_{\rm Coriolis} = 2\omega \times \mathbf{v}_R = -2(\omega \cdot \omega_R)\mathbf{x}$$

Sommando i tre contributi si trova che $\mathbf{a}_A \stackrel{\checkmark}{=} -(\omega + \omega_R)^2 \mathbf{x} + \dot{\omega} \times \mathbf{x}$. Ricordo che l'accelerazione di trascinamento è l'accelerazione, rispetto al sistema assoluto, del punto del sistema relativo dove si trova il corpo (se il corpo si muove questo punto cambia, ma questo non conta).

Esercizio 21: Introduzione alle coordinate polari *

(Compitino del 5/4/95) Un piattaforma ruota con velocità angolare costante $\omega = 1.10\,\mathrm{rad/s}$. Un oggetto si muove radialmente verso il centro di rotazione con velocità angolare costante $v_0 = 0.88\,\mathrm{m/s}$ rispetto alla piattaforma. Al tempo $t = 0$ l'oggetto si trova a distanza $\rho_0 = 4.7\,\mathrm{m}$ dal centro di rotazione, sull'asse x del sistema di coordinate mostrato in figura. Il sistema di coordinate è fisso in un sistema di riferimento interziale. Al tempo $t_1 = 3.30\,\mathrm{s}$ si calcoli:
(1) La componente x del vettore posizione del mobile nel sistema di coordinate indicato;
(2) Il modulo della velocità del mobile rispetto al sistema inerziale;
(3) Le componenti F_ρ e F_θ della forza agente sul mobile, sapendo che ha massa $m = 4.70\,\mathrm{kg}$, in un sistema di coordinate polari con origine il centro di rotazione della piattaforma;
(4) Il modulo della componente dell'accelerazione perpendicolare alla velocità.

✍**Soluzione**: È facile rispondere alle domande 1 e 2 usando le coordinate cartesiane dove

$$\mathbf{x} = x(t)\mathbf{e}_x + y(t)\mathbf{e}_y = (r_0 - v_0 t)\begin{pmatrix}\cos\omega t\\ \sin\omega t\end{pmatrix}$$

e $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$. Per le domande 3 e 4 conviene passare dalle coordinate cartesiane $x(t), y(t)$ a quelle polari $\rho(t), \theta(t)$. In generale

$$\mathbf{e}_\rho = \begin{pmatrix}\cos\theta(t)\\ \sin\theta(t)\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}_\theta = \begin{pmatrix}-\sin\theta(t)\\ \cos\theta(t)\end{pmatrix} = \dot{\mathbf{e}}_\rho/\dot{\theta}, \qquad \dot{\mathbf{e}}_\theta = \dot{\theta}\mathbf{e}_\rho$$

La relazione $\mathbf{e}_i \cdot \dot{\mathbf{e}}_i = 0$ è ovvia in quanto $\mathbf{e}_i^2 = 1$. Nel nostro caso $\theta(t) = \omega t$ e $r(t) = r_0 - v_0 t$:

$$\mathbf{x}(t) = r(t)\mathbf{e}_\rho(t), \qquad \dot{\mathbf{x}}(t) = -v_0\mathbf{e}_\rho + r(t)\omega\mathbf{e}_\theta, \qquad \ddot{\mathbf{x}}(t) = -2v_0\omega\mathbf{e}_\theta - r\omega^2\mathbf{e}_\rho$$

Sono verificate (anzi dimostrate) le relazioni generali

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} = \dot{\rho}\mathbf{e}_\rho + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta, \qquad \mathbf{a} = \ddot{\mathbf{x}} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_\rho + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta$$

All'istante t_1

$$\mathbf{x}(t) = 1.79\,\mathrm{m}\,\mathbf{e}_\rho = -\begin{pmatrix}1.586\\ 0.843\end{pmatrix}\mathrm{m}, \qquad \dot{\mathbf{x}}(t) = [-0.88\mathbf{e}_\rho + 1.9756\mathbf{e}_\theta]\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, \qquad \mathbf{F}(t) = [9.285\mathbf{e}_\theta - 4.136\mathbf{e}_\rho]\mathrm{N}$$

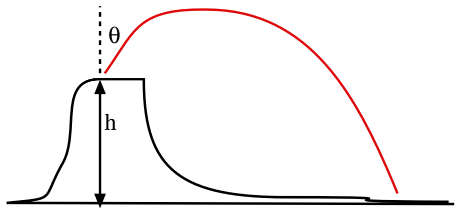


Figura 3.1: Gittata da una montagna

.

Quindi $v(t_1) = 2.162\,\mathrm{m/s}$ e $a_\perp = \sqrt{a^2 - a_=} = 2.772\,\mathrm{m/s^2}$ dove $a^2 = 8.47(\mathrm{m/s^2})^2$ e $a_= = \mathbf{a}\cdot\mathbf{v}/v = -r(t_1)v_0\omega^2/v(t_1) = -0.884\,\mathrm{m/s^2}$. L'accelerazione ortogonale è scrivibile come $a_\perp(t) = v^2(t)/r_{\rm osc}(t)$ dove $r_{\rm osc} = 1.68\,\mathrm{m}$ è il 'raggio osculatore', cioè il raggio della circonferenza che meglio approssima la traiettoria attorno a $\mathbf{x}(t)$ [$r_{\rm osc} = |(1+(y')^2)^{3/2}/y''|$ per una traiettoria $y(x)$]. (nel senso che ha uguali derivate prime e seconde). Il centro della circonferenza è $\mathbf{x}(t) - r_{\rm osc}\mathbf{a}_\perp(t) = (-0.54, 0.48)^T$, dove $\mathbf{a}_\perp = \mathbf{a} - \mathbf{v}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})/v^2$. In coordinate cartesiane $\dot{\mathbf{x}}(t_1) = (1.70, -1.33)$, $\ddot{\mathbf{x}}(t_1) = (1.01, 2.73)$.

Esercizio 22: Cinematica semplice

Si dimostrino le seguenti formule, dove $v = \tilde v\,\mathrm{km/h}$:

$$\begin{pmatrix}\text{Spazio reazione}\\ \text{per } t = 1\,\mathrm{s}\end{pmatrix} = \frac{3}{10}\tilde v\ \mathrm{m},\qquad \text{Spazio di frenata} = \frac{\tilde v^2}{250\eta}\,\mathrm{m},\qquad \text{Distanza di arresto} = (\frac{\tilde v}{10})^2\,\mathrm{m}$$

✍**Soluzione**: La prima è $\ell = vt = \tilde v\,\mathrm{km/h}(1\,\mathrm{s}) = \tilde v\,\mathrm{m}/3.6$. La seconda si ottiene da $m\ddot x = F_A = -m\eta g$ da cui $v(t) = v(0) - \eta g t$ e $x(t) = x(0) + v(0)t - \frac12\eta g t^2$. Per cui il tempo di fermata è $\Delta t = v_0/\eta g$ e lo spazio di frenata è $\Delta x = v_0^2/2\eta g = \tilde v^2\,\mathrm{m}/(2\cdot 3.6^2\cdot 10\eta)$. La terza è un fit della somma delle prime due adattato per una tipica velocità $\tilde v \sim 100$ e per un tipico $\eta = 0.6$. [Moto a potenza costante: $\frac12 mv^2 = \frac12 mv^2 + Wt$, $F = W/v$.]

Esercizio 23: Moto rettilineo in coordinate polari

Verificare che $x(t) = vt$ e $y(t) = h$ ha accelerazione zero in coordinate polari.

✍**Soluzione**: In coordinate polari $\rho(t) = \sqrt{v^2t^2 + h^2}$ e $\theta(t) = \arctan(h/vt)$. Quindi $v_\rho = \dot\rho = tv^2/\rho$ e $v_\theta = \rho\dot\theta = -vh/\rho$ $(v_\theta^2 + v_\rho^2 = v^2)$ e

$$a_\rho = \ddot\rho - \rho\dot\theta^2 = [v^2/\rho - (tv^2)^2/\rho^3] - (vh)^2/\rho^3 = 0,\qquad a_\theta = \rho\ddot\theta + 2\dot\rho\dot\theta = (1-1)2tv^3h/\rho^3$$

Esercizio 24: Raggio osculatore

Si calcoli il 'raggio osculatore' corrispondente al moto $x = vt$, $y = at^2/2$ all'istante $t = 0$.

✍**Soluzione**:

1. Con la cinematica: $\mathbf{v} = (v, at)$, $\mathbf{a} = (0, a)$. La componente di $\mathbf{a}$ ortogonale a $\mathbf{v}$, all'istante $t = 0$ vale a. Sapendo che $v^2/r = a_\perp$ si ottiene $r = v^2/a$.

2. Il raggio osculatore ha anche un significato geometrico: è il cerchio che localmente meglio approssima la traiettoria vera (in questo caso una parabola). La traiettoria è una parabola $y = (a/2v^2)x^2$. Una circonferenza tangente nell'origine ha $y = r - \sqrt{r^2 - x^2} \approx x^2/2r + \mathcal{O}(x^4)$ (senza usare Taylor: $y' = x/\sqrt{r^2 - x^2}$, $y'' = 1/\sqrt{r^2 - x^2} + x^2\cdots$, quindi $y''(0) = 1/r$). Quindi $r = v^2/a$.

Capitolo 4

Sistemi non inerziali

Esercizio 25: Sistema uniformemente accelerato

Urto in caduta libera. Anche palloncino e filo a piombo in treno accelerato.

✍**Soluzione**: Se invece di usare un sistema inerziale x_A uso un sistema accelerato x_R, legati da $x_A = x_R + \frac{1}{2}At^2$ (cioè l'origine di x_R accelera 'in avanti'), l'equazione del moto nel sistema inerziale $m\ddot{x}_A = F$ diventa, nel sistema non inerziale, $m(\ddot{x}_R + A) = F$. Cioè devo aggiungere una forza apparente $-mA$. Esattamente come la gravità essa è proporzionale alla massa, per una accelerazione universale. Quindi è equivalente ad avere una 'gravità storta'. L'uso di sistemi non inerziali è estremamente utile per risolvere alcuni problemi (esempio: trovare la forza tale che un sistema accelerato non subisca moti relativi).

Secondo esempio: mentre un treno accelera un filo a piombo ed un palloncino di elio, si inclinano nello stesso modo. Usando un sistema accelerato, nel quale la gravità è storta, questo risultato è ovvio: è esattamente come avere un treno fermo su una pendenza $\tan\theta = a/g$. Lavorando in un sistema inerziale è un pasticcio tremendo: occorre calcolare la forza di archimede per una distribuzione di densità dell'aria modificata dall'accelerazione.

Esercizio 26: Massima velocità in curva

Trovare la massima velocità prima del ribaltamento di un auto larga $2a$ e con il baricentro alto h

✍**Soluzione**: Le forze apparenti possono essere dimostrate in modo immediato: in coordinate polari, in un sistema Assoluto

$$a_{A\rho} = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}_A^2, \qquad a_{R\theta} = \rho\ddot{\theta}_A + 2\dot{\rho}\dot{\theta}_A$$

Le coordinate Assolute (ρ, θ_A) sono legate a quelle in un sistema Ruotante (ρ, θ_R) da

$$\rho_A = \rho_R = \rho, \qquad \theta_A = \theta_R + \omega t$$

($\omega > 0$ significa ruotare in senso antiorario). Quindi, sostituendo si ha $v_{A\rho} = v_{R\rho}$, $v_{A\theta} = v_{R\theta} + \rho\omega$ e

$$F_\rho/m = a_{A\rho} = \overbrace{(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}_R^2)}^{a_{R\rho}} - \rho\omega^2 - 2\rho\dot{\theta}_R\omega, \qquad F_\theta/m = a_{A\theta} = \overbrace{(\rho\ddot{\theta}_A + 2\dot{\rho}\dot{\theta}_A)}^{a_{R\theta}} + 2\dot{\rho}\omega$$

Quindi esiste una forza centrifuga $+m\rho\omega^2\mathbf{e}_\rho$ ed una forza di Coriolis $2m\omega(v_{R\theta}\mathbf{e}_\rho - v_{R\rho}\mathbf{e}_\theta) = 2m\mathbf{v}_R \times \omega$ (in quanto $\mathbf{e}_\rho \times \mathbf{e}_z = -\mathbf{e}_\theta$).

Nel sistema di riferimento ruotante è esattamente come stare su di un piano inclinato: $(mv^2/r)/(mg) < a/h$ cioè $v^2 < gra/h$. Prima di ribaltarsi la macchina potrebbe slittare $mv^2/r < \mu mg$ cioè $v^2 < \mu gr$. L'attrito dell'aria $\sim S\rho_{\text{aria}}v^2$ migliora la stabilità [assurda: v si cancella]

Siccome un generico spostamento rigido (riparametrizzazione che conserva le distanze) è combinazione di una traslazione ed una rotazione, gli ultimi due esercizi dovrebbero essere sufficienti per derivare la formula generale

$$\mathbf{a}_R = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{\text{tr}} + \mathbf{a}_{\text{Co}}, \qquad \mathbf{a}_{\text{Co}} = -2\mathbf{v}_R \times \omega$$

mentre a_{tr} è l'accelerazione assoluta del punto del sistema relativo.

Esercizio 27: Forze apparenti: nonno visto dalla giostra

Un osservatore B va su una giostra che ruota con velocità angolare ω. Suo nonno N lo aspetta in panchina. Descrivere la dinamica nei due sistemi di riferimento N e B

✍**Soluzione**: Nel sistema inerziale N le equazioni del moto sono $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Chiamando τ la forza che la giostra esercita per far girare B, le accelerazioni sono $\mathbf{a}_N = 0$ $\mathbf{a}_B = -\omega^2\mathbf{r}_B$. Quindi le equazioni del moto sono

$$\begin{array}{rrcl} \text{per } B: & -m\omega^2\mathbf{r}_B & = & \tau \\ \text{per } N: & 0 & = & 0 \end{array}$$

Nel sistema non inerziale B le equazioni del moto sono

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\rm app} = \mathbf{F} - m\mathbf{a}_{\rm tr} - m\mathbf{a}_{\rm Co} = \mathbf{F} + m\omega^2\mathbf{r} + 2m\mathbf{v}\times\omega$$

dove $\omega = (0, 0, +\omega)$ se la giostra gira in senso antiorario (come la Terra). Quindi le equazioni del moto sono

$$\begin{array}{rrcl} \text{per } B: & 0 & = & \tau + m\omega^2\mathbf{r}_B + 0 \\ \text{per } N: & -m\omega^2\mathbf{r}_N & = & 0 + m\omega^2\mathbf{r}_N - 2m\omega^2\mathbf{r}_N \end{array}$$

Esercizio 28: Forze apparenti

Quale è l'inclinazione di un filo a piombo a terra ed in un treno che si muove da nord a sud (a) sul polo (b) all'equatore (c) ad una latitudine $\phi = 45°$. Il raggio della terra è $r_E = 6400\,\text{km}$. La velocità del treno è $v_A = 300\,\text{km/h} = 250/3\,\text{m/s}$.

✍**Soluzione**: La terra gira con $\omega \approx 2\pi/24\text{ore} = 7.27\ 10^{-5}/\text{s}$, quindi una persona sull'equatore si muove verso oriente con velocità $\omega r_E = 537\,\text{m/s}$. L'equazione del moto nel sistema non inerziale della terra è

$$m\mathbf{a}_R = \mathbf{F} - \mathbf{F}_{\rm tr} - \mathbf{F}_{\rm Co} = -m\mathbf{g} + m\omega^2\mathbf{x} + 2m\mathbf{v}_R\times\omega$$

(a) Sul polo nord la forza centripeda è zero. Nell'emisfero nord la forza di Coriolis è diretta verso destra, rispetto alla direzione del moto. Quindi $\tan\theta = 2v\omega/g = 1.2\ 10^{-3}$ cioè $\theta = 0.7°$.

(b) Lungo l'equatore la forza di Coriolis è zero. Quindi la forza è sempre verticale.

(c) Alla latitudine di $\phi = 45°$ la forza di Coriolis è diretta a destra ed ha modulo $mv\omega\sin\phi$. La forza centripeda è diretta $45°$ in avanti ed ha modulo $mr\omega^2\cos\phi$, cioè $mr\omega^2\cos\phi\sin\phi = mr\omega^2/2$ in avanti e $mr\omega^2\cos^2\phi = mr\omega^2/2$ in alto. Quindi il filo a piombo è deflesso in avanti a destra. La componente verticale è $g' = g - 0.02\,\text{m/s}^2$. La deflessione a destra è $\tan\theta = v\omega\sqrt{2}/g' = 0.9\ 10^{-3}$ cioè $\theta = 0.05°$. La deflessione in avanti è $\tan\theta = r\omega^2/2g' = 1.7\ 10^{-3}$ cioè $\theta = 0.10°$. Quindi la deflessione totale è $(0.05^2 + 0.10^2)^{1/2} = 0.11°$ in direzione $\arctan(0.05/0.10) = 26°$ verso sud-ovest.

Esercizio 29: Forza di Coriolis: deviazione verso oriente

Si stimi di quando si sposta verso oriente un corpo lasciato libero di cadere per un tempo t all'equatore

✍**Soluzione**: Lavorando nel sistema inerziale un corpo ad altezza h si muove verso oriente con velocità $v_h = \omega h$ maggiore di quella di un corpo più basso. Quindi cascando si muove verso oriente. Siccome $h(t) = h_0 - \frac{1}{2}gt^2$

$$\Delta x = \int_0^t [v_{h(t')} - v_{h(t)}]dt' = \omega\int_0^t [h(t) - h(t')]dt' = \omega\int_0^t \frac{g}{2}[t^2 - t'^2]dt' = (\frac{1}{2} - \frac{1}{6})\omega g t^3 = \frac{1}{3}\omega g t^3$$

Lavorando nel sistema ruotante solidale con la terra si trova nuovamente lo stesso spostamento

$$\ddot{x} = 2\omega v_z\cos\theta = 2\omega g t\cos\theta, \qquad : \qquad \Delta x = \frac{1}{3}\omega g t^3\cos\theta$$

($\cos\theta = 1$ all'equatore)

Esercizio 30: Forza di Coriolis e lavandini

Perchè nell'emisfero nord un lavandino non si svuota con l'acqua che gira in senso antiorario, come vorebbe la forza di Coriolis?

✍**Soluzione**: La forza di Coriolis è troppo debole per far girare in senso antiorario l'acqua di un lavandino che casca nello scarico. Assumendo che la velocità dell'acqua verso il centro sia $v_\rho \approx 10\,\mathrm{cm/\,sec}$, $a^\theta_{\mathrm{Co}} = 2v_\rho\omega_z \approx 10^{-7}g$: basta quindi che il lavandino sia storto di un milionesimo di grado, e la gravità impedisce la rotazione.

Un modo per 'sentire' che la forza di Coriolis esiste è...

Esercizio 31: Forze di marea

Calcolare le forze sentite in orbita circolare libera

✍**Soluzione**: Le equazioni del moto dei vari atomi i di un oggetto in orbita sono $m_i\mathbf{a}_i = -Gm_iM\mathbf{r}_i/r_i^3 + \mathbf{F}_i$ dove $\mathbf{F}_i$ indica una qualche forza 'interna' che tiene insieme l'oggetto. Sommando tutte le equazioni possiamo scrivere l'equazione di moto del centro di massa

$$M_{\mathrm{CM}}\mathbf{A}_{\mathrm{CM}} \equiv \sum m_i\mathbf{a}_i = -\sum \frac{Gm_iM\mathbf{r}_i}{r_i^3} \approx -\frac{GMM_{\mathrm{CM}}\mathbf{R}_{\mathrm{CM}}}{R^3_{\mathrm{CM}}}(1+\mathcal{O}(\frac{d}{R_{\mathrm{CM}}})^2)$$

Avendo sviluppato $\mathbf{r}_i = \mathbf{R}_{\mathrm{CM}} + \mathbf{d}_i$ ed indicato con d la dimensione tipica dell'oggetto in orbita. Notare che, siccome la forza di gravità è proporzionale alla massa, non ci sono correzioni al primo ordine in d/R Quindi se $d/R = 10^{-3}$ (ad es. una mega-astronave di dimensioni $d \sim 10\,\mathrm{km}$ in orbita a $R \sim 10^4\,\mathrm{km}$ dalla terra) l'equazione del baricentro è corretta entro una parte per milione. Per semplicità assumeremo d'ora in poi che il corpo rigido sia costituito di due soli 'atomi' di egual massa m (ad es. due sferette unite da un'asta) a distanza d e scriviamo $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_{\mathrm{CM}} + \mathbf{d}/2$ e $\mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_{\mathrm{CM}} - \mathbf{d}/2$.

Calcoliamo le forze interne necessarie per tenere il corpo rigido. Dovremmo imporre $|\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2| = 0$. Per semplicità imponiamo $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 = 0$, cioè che il corpo sia rigido e che non ruoti su se stesso. Per ulteriore semplicità assumiamo che l'oggetto sia orientato in modo che $\mathbf{R}_{\mathrm{CM}} \equiv \mathbf{R}$ e $\mathbf{d}$ siano paralleli. Si trova

$$0 = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1 = -GM\hat{\mathbf{R}}\bigg[\frac{1}{(R+d/2)^2} - \frac{1}{(R-d/2)^2}\bigg] + \frac{\mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1}{m} \approx \frac{2dGM}{R^3}\hat{\mathbf{R}} + \frac{2\mathbf{F}_2}{m}$$

Quindi i due oggetti iniziano ad allontanarsi a meno che non siano tenuti assieme da una forza interna $F_2 = (d/R)GmM_T/R^2$. Applicazioni: (1) 'microgravità' all'interno di astronavi (2) forze di marea (3) la forza di gravità $F_2 = Gm^2/d^2$ è una forza attrattiva abbastanza grande da tenere uniti due masse m solo se $m/d^3 \geq M_T/R^3$. Assumendo che M sia la massa di un pianeta di raggio R_S e densità ρ_S, due sferette di diametro d e con la stessa densità ρ_S del pianeta rimangono attaccate solo se orbitano a distanza $R > 4^{1/3}R_S$. Questo spiega perchè gli anelli di Saturno non sono troppo vicini a Saturno (limite di Roth).

$V(r)/m = -GM/r - \omega r^2/2$, $\mathbf{F} = -\nabla V$ vale zero per $r = r_0$ se $\omega^2 = GM/r^3$ (legge di Keplero). La forza residua al primo ordine è $F_z/m = -3GM(\delta z)/r_0^3$, $F_x = 0$. Mantiene l'orbita stabile (e tende a schiacciare l'astronave; se invece che orbitare e'in caduta libera $F/m = -2GM(\delta z)/r_0^3 = -2g(\delta z)/r_0$. Anche per $M = M_{\mathrm{sole}}$ ed $r = r_{\mathrm{sole}}$ e $\delta z = \mathrm{m}$, vale solo $10^{-7}g$. Vale invece 3 $10^{-7}g$ sulla terra.). Agli ordini successivi $F_x/m = -3GM(\delta x)(\delta z)/r_0^4 \neq 0$ ma $F_\theta = 0$ come ovvio.

Capitolo 5

Scrittura di equazioni del moto

Procedere nel modo piatto porta in fondo, passando attraverso un sistema 'abbondante' di equazioni lineari. Due trucchi semplificano i calcoli in casi particolari: (1) usare la conservazione dell'energia (quando è costante) per ricavare le equazioni del moto senza aver a che fare con forze 'interne' (2) usare sistemi non inerziali, per calcolare la forze esterna necessaria per evitare il moto relativo di un sistema di oggetti.

Esercizio 32: Massa trascinata da un filo

Si applica una forza F_{ext} ad un anellino di massa m ad un capo di un filo inestensibile di massa trascurabile (fimt), al cui altro capo è attaccata una massa M libera di scorrere senza attrito. Si scriva l'equazione del moto.

✍**Soluzione**: Le equazioni sono

$$M\ddot{X} = \tau_2, \qquad m\ddot{x} = \tau_1 + F$$

Siccome il filo è inestensibile $X - x = \text{cte}$. Siccome il filo ha massa zero $\tau_1 + \tau_2 = 0$. Quindi $\ddot{x} = \ddot{X} = F/(M+m)$ e $\tau_2 = F\ M/(M+m)$.

Esercizio 33: Carrucola

Due masse m_1 ed m_2 sono legate ai due capi di un fimt libero di scorrere verticalmente senza attrito su di una carrucola. Trovare tutto.

✍**Soluzione**: Le 4 equazioni per le 4 incognite sono

$$m_1\ddot{z}_1 = -m_1 g + \tau_1, \qquad m_2\ddot{z}_2 = -m_2 g + \tau_2, \qquad \tau_1 = +\tau_2, \qquad \ddot{z}_1 = -\ddot{z}_2$$

da cui $\ddot{z}_2 = g(m_1 - m_2)/(m_1 + m_2)$, $\tau_2 = 2gm_1m_2/(m_1 + m_2) = 2g\mu$. Il peso sostenuto dalla carrucola è $\tau_1 + \tau_2$. Se $m_1 = m_2$ $\ddot{z}_i = 0$ e τ_i coincide con i pesi sostenuti dal filo.

Allo stesso risultato si può arrivare senza mai introdurre forze interne (tensioni e reazioni vincolari) usando la consevazione dell'energia

$$E = \frac{m_1}{2}\dot{z}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{z}_2^2 + m_1 g z_1 + m_2 g z_2 = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{z}_2^2 + (m_2 - m_1) g z_2 + \text{cte}$$

Imponendo $\dot{E} = 0 = \dot{z}_2[(m_1+m_2)\ddot{z}_2+(m_2-m_1)g]$ si ritrova l'equazione del moto. Tutto ciò è possibile in quando le forze interne assumono i valori necessari affinchè i vincoli di rigidità siano rispettati, e quindi la condizione di rigidità $\ddot{z}_1 = -\ddot{z}_2$ implica che esse non compiono lavoro ed è sufficiente a determinarle implicitamente.

Esercizio 34: Sequenza di vagoni

Quattro vagoni di massa m_i sono consecutivamente connessi da fili inestensibili di massa trascurabile. Si calcolino le tensioni nei fili presenti se una forza F tira il primo vagone.

✍**Soluzione**: La soluzione di

$$m_1 a_1 = F - \tau_1, \qquad m_2 a_2 = \tau_1 - \tau_2, \qquad m_3 a_3 = \tau_2 - \tau_3, \qquad m_4 a_4 = \tau_3$$

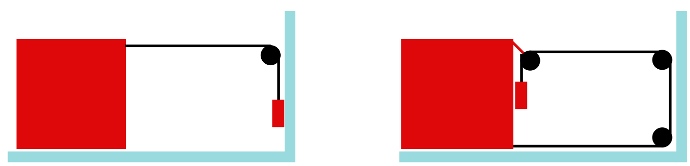
detta a l'accelerazione comune è

$$\tau_3 = m_4 a, \qquad \tau_2 = (m_3 + m_4)a, \qquad \tau_1 = (m_2 + m_3 + m_3)a, \qquad a = F/(m_1 + m_2 + m_3 + m_4)$$

Questo esercizio indica come trattare un filo con massa

Esercizio 35: Sistema ad 'L'

Si considerino i due sistemi in figura, dove i fili sono inestensibili e di massa trascurabile; le carrucole hanno masse tracurabili; nessun attrito è presente. Per entrambi i sistemi scrivere le equazioni del moto, e calcolare l'accelerazione. Calcolare inoltre quale forza orizzontale deve essere applicata sul bloccone per tenerlo fermo e la reazione del piano orizzontale.

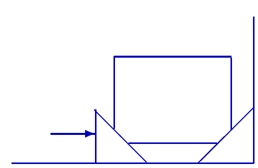


✍**Soluzione**: In entrambi i casi $ma = mg - \tau$ dove a è l'accelerazione verticale del pesino, per cui $\tau = m(g - a)$. Nel primo caso $A = a$ e $MA = \tau + F_{\text{ext}}$, per cui per avere $a = 0$ serve $F_{\text{ext}} = -mg$. Senza forze esterne $A = gm/(M + m)$. I piani d'appoggio esercitano una reazione $\mathbf{F} = (\tau, Mg + \tau)$.

Nel secondo caso $a = 2A$, per cui $\tau = m(g - 2A)$ e $(m + M)A = 2\tau + F_{\text{ext}}$, per cui per avere $a = 0$ serve $F_{\text{ext}} = -2mg$. Senza forze esterne $A = 2gm/(M + 5m)$. I piani d'appoggio esercitano una reazione $\mathbf{F} = (2\tau, Mg + (2 - 1)\tau)$.

Esercizio 36: Peso appoggiato su due cunei *

(es. 2 del 30/1/97). Si consideri il sistema in figura, formato da due cunei uguali di massa $m = 2\,\text{kg}$, appoggiati su di un piano, sui quali può scorrere una massa $M = 19\,\text{kg}$. Il cuneo di destra non può muoversi orizzontalmente a causa della parete con cui è in contatto. Tutti gli attriti sono trascurabili, e si assuma che l'intensità del campo gravitazionale valga $g = 10\,\text{m/s}^2$. I cuenei hanno sezione a forma di triangolo rettangolo isoscele. Si calcolino



1. La forza orizzontale (freccia nel disegno) che è necessario applicare al cuneo di sinistra, parallelamente al terreno, affinché le masse non si muovano una rispetto all'altra $(4, -2)$

Si rimuove ora la forza della dommanda 1. e si lasciano le masse libere di muoversi nel campo gravitazionale. Si calcolino, nella nuova situazione:

2. L'accelerazione orizzontale del cuneo di sinistra $(4, -2)$;

3. La forza orizzontale esercitata dalla parete sul cuneo di destra $(3, -1)$;

4. La forza totale verticale esercitata dal piano di appoggio sui due cunei $(4, 2)$

✍**Soluzione**: Chiamo (X, Z) le cooridnate del pesone, e (x, z) quelle del cuneo di sinistra (l'unico libero di muoversi). Chiamo $\mathbf{R}$ ($\mathbf{L}$) le reazione vincolare esercitate dal cuneo di destra (sinistra) sulla massa M. Quindi $R_x = -R_y$ e $L_x = L_y$. Le equazioni del moto sono

$$\begin{aligned} M\ddot{X} &= L_x + R_x = L_y - R_y \\ M\ddot{Z} &= L_y + R_y - Mg \\ m\ddot{x} &= -L_x + F_{\text{ext}} \end{aligned}$$

Il vincolo è $\ddot{Z} = +\ddot{X}$ e $\ddot{x} = 2\ddot{X}$. Risolvendo

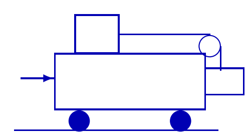
$$R_y = \frac{gM}{2}, \qquad L_y = \frac{M(F_{\text{ext}} + gm)}{2m + M}, \qquad \ddot{x} = \frac{2F_{\text{ext}} - gM}{2m + M}$$

L'equazione per x si ottiene prendendo la combinazione nella quale le forze di vincolo si cancellano $M\ddot{X} + M\ddot{Z} + 2m\ddot{x} = 2F_{\text{ext}} - Mg$ e semplificando usando i vincoli sulle accelerazioni. Quindi

- la forza per tenere fermo il sistema è $F_{\text{ext}} = \frac{1}{2}gM\tan\theta = gM/2 = 45\,\text{N}$ (con questa F_{ext} si ha $L = R$).
- In assenza della forza $\ddot{x} = -gM/(2m + M) = 8.26\,\text{m/s}^2$.
- La reazione orizzontale della parete sul cuneo di destra vale $-R_x = R_y = gM/2$
- La forza totale esercitata dal piano d'appoggio vale $2mg - -(L_y + R_y) = 151.5\,\text{N}$. Come al solito, la si poteva anche calcolare come $(M + 2m)g - M\ddot{Z}$ (il peso totale, meno quello in caduta).

Si poteva anche usare la conservazione dell'energia per ripondere alle tre domande concernenti il moto libero: l'energia in funzione di Z è $E = 2\frac{1}{2}M\dot{Z}^2 + \frac{1}{2}m(2\dot{Z})^2 + MgZ = (M + 2m)\dot{Z}^2 + MgZ$. Imponendo $\dot{E} = 0$ si trova l'equazione del moto.

Esercizio 37: Carrucola su carrello accelerato *



(es. 2 del 13/01/96). Si consideri il sistema in figura, formato da un carrello di massa $M = 5.4\,\text{kg}$ su cui sono liberi di scorrere orizzontalmente un massa $m_o = 1.3\,\text{kg}$, e verticalmente una massa $m_v = 16\,\text{kg}$, connessi da un fimt. Tutti gli attriti sono trascurabili e si assuma che l'intensità del campo gravitazionale valga $g = 10\,\text{m/s}^2$. Si calcolino

1. La forza orizzontale F (freccia nel disegno) che è necessario applicare al carrello, parallelamente al terreno, per far sí che le masse non si muovano una rispetto all'altra (punteggio 10, -3);
2. Il modulo R della risultante della forza applicata dalla carrucola al filo (punteggio 5, -2).

✍**Soluzione**: Il risultato è ovvio facendo i calcoli nel sistema accelerato (non inerziale) solidale con le tre masse:

1. Lavorando nel sistema inerziale non accelerato la condizione di equilibrio è $gm_v = am_o$. Quindi $a = 123\,\text{m/s}^2$. La forza per imprimere questa accelerazione al complesso dei tre corpi è $F = (M + m_o + m_v)a = 2792\,\text{N}$.
2. $\tau = m_v g$ (in quanto m_v non si muove verticalmente). Quindi $R = \sqrt{2}\tau = 226\,\text{N}$.

Se avessimo voluto scrivere tutte le equazioni:

$$M\ddot{X} = F + R_v - \tau, \qquad m_v\ddot{x}_v = -R_V, \qquad m_v\ddot{z}_v = -m_v g + \tau, \qquad m_o\ddot{x}_o = \tau$$

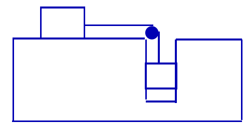
con $\ddot{z}_v + (\ddot{x}_o - \ddot{X}) = 0$ e $\ddot{x}_v = \ddot{X}$. Equazioni addizionali per $\ddot{Z} = 0$ e $\ddot{z}_o = 0$ permetterebbero di determinare tutte le reazioni vincolari. Con queste equazioni è possibile trovare tutte le accelerazioni per una data F:

$$\ddot{X} = \frac{F(m_o + m_v) - gm_o m_v}{M(m_o + m_v) + m_v(2m_o + m_v)]}, \qquad \ddot{x}_o = \frac{[F + g(M + m_v)]m_v}{M(m_o + m_v) + m_v(2m_o + m_v)]}$$

Aggiungendo la 7a equazione $\ddot{X} = \ddot{x}_o$ si determina la F esterna che impedisce moti relativi:

$$F = (M\ddot{X} + m_o\ddot{x}_o + m_v\ddot{x}_v) = (M + m_o + m_v)\ddot{x}_o == (M + m_o + m_v)\tau/m_o = g(M + m_v + m_o)m_v/m_o$$

Esercizio 38: Carrucola su carrello accelerato bis



(es. 2 del 13/01/96). Sopra un blocco di massa $m = 13\,\mathrm{kg}$ sono disposti, come illustrato in figura, due blocchetti più piccoli. Il blocchetto superiore, di massa $m_1 = 3.7\,\mathrm{kg}$ è collegato tramite una fune ed un'opportuna guida curva al scondo blocchetto, di massa $m_2 = 9.8\,\mathrm{kg}$, che può scorrere senza attrtito in un foro praticato nel blocco più grande. La fune che collega i due blocchetti è inestensibile e di massa trascurabile, la guida curva è senza attrito. Il blocchetto superiore è inizialmente fissato al blocco più grande tramite un piolo di massa trascurabile. Si assuma per l'accelerazione di gravità il valore $10\,\mathrm{m/\,s}^2$.

1. Calcolare l'intensità delle forze che devono essere esercitate sul blocco più grande per tenerlo in quiete $(2, -1)(2, -1)$
2. Il piolo viene poi rimosso in modo che i blocchetti possano scorrere senza attrito. In queste condizioni determinare nuovamente le forze necessarie a mantenere il blocco più grande in quiete $(4, -2)(3, -1)$.
3. Sempre in assenza del piolo, applicando un'opportuna forza orizzontale al blocco più grande, ora libero di scorrere senza attrito su di un piano orizzontale. è possibile impedire il moto relativo tra i vari blocchi. Determinare l'intensità di questa forza $(4, -2)$.

✍**Soluzione**:

1. Occorre applicare una forza opposta alla somma delle forze peso subite dai tre blocchi, quindi $F_x = 0$ ed $F_y = (m + m_1 + m_2)g = 265\,\mathrm{N}$. Se scrivessi tutte le forze, la tensione τ che vorrebbe spostare all'indietro il carrellone sarebbe compensata dalla forza del perno.
2. Se il blocco più grande sta in quiete, il blocchetto verticale cade con $a = gm_2/(m_1 + m_2) = 7.25\,\mathrm{m/\,s}^2$. Quindi occorre $F_x = \tau = (g - a)m_3 = am_2 = 26.8\,\mathrm{N}$ ed $F_y = g(m + m_1) + (g - a)m_2 = 193.8\,\mathrm{N}$.
3. Ragioniamo nel sistema accelerato solidale con il bloccone. I due blocchini non si muovono se $a = gm_2/m_1 = 26\,\mathrm{m/\,s}^2$. Per imprimere questa accelerazione occorre eserciatare una forza $F_x = a(m + m_1 + m_2) = 701.9\,\mathrm{N}$.

Esercizio 39: Piano inclinato

Si scrivano le equazioni

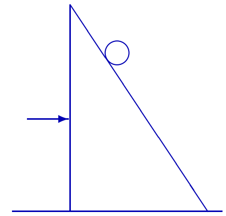
✍**Soluzione**: Le equazioni sono $m\ddot{\mathbf{x}} = m\mathbf{g} + \mathbf{R}$. Conviene scegliere assi x ed y lungo il piano inclinato. Le equazioni sono

$$m\ddot{x} = mg\sin\theta, \qquad m\ddot{y} = -mg\cos\theta + R$$

La prima equazione fornisce il moto, la seconda fornisce R in quanto $\ddot{y} = 0$. Naturalmente $R_z = m(g - \ddot{z}) = mg\cos\theta$.

Alternativamente $E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + mgz$ con $z = x\sin\theta$. Usare $E(x)$ o $E(z)$ dà equazioni del moto equivalenti.

Esercizio 40: Pesetto su piano inclinato scorrevole



(es. 2 del 12/1/98). Si consideri un cuneo di massa $M = 17\,\mathrm{kg}$ libero di muoversi senza attrito su un piano orizzontale. Sul cuneo è posta una massa $m = 6.6\,\mathrm{kg}$ libera di scorrere senza attrito (raffigurata come un cerchio in figura). Si assuma per l'accelerazione di gravità il valore $10\,\mathrm{m/\,s}^2$. L'angolo tra la superficie del cuneo e l'orizzontale è $\theta = \pi/3$. Sul cuneo è applicata una forza orizzontale incognita come mostrato in figura, tale da mantenerlo fermo mentre la massa appoggiata su di esso scende. Si calcoli

1. Quanto è il modulo della forza orizzontale esterna $(4, -2)$
2. Quanto è il modulo della forza che il piano orizzontale esercita sul cuneo $(4, -2)$

Si rimuove ora la forza che teneva fermo il cuneo e si applica una nuova forza, sempre come mostrato dalla freccia in figura. Con le opportune condizioni iniziali, si osserva che la massa appoggiata si muove di moto rettilineo uniforme rispetto alla superficie del cuneo, con velocità $v = 1\,\mathrm{m/s}$ lungo una retta di massima pendenza. Si calcolino, nella nuova situazione

3. Quanto tempo impiega la massa ad aumentare la sua quota di $1.7\,\mathrm{m}$ $(3, -1)$
4. Quanto è il modulo della forza orizzontale esterna $(5, -2)$
5. Quanto è il modulo della forza che il piano orizzontale esercita sul cuneo $(2, -1)$

✍**Soluzione**:

1. La componente della forza peso ortogonale al cuneo non viene annullata dalla reazione vincolare ed ha modulo $P_\perp = mg\cos\theta = mg/2$. La forza necessaria ha solo una componente orizzontale, uguale a meno la componente orizzontale di $\mathbf{P}_\perp$: $F = -P_\perp^x = mg\sin\theta\cos\theta = 28.57\,\mathrm{N}$.
2. Vale $Mg - P_\perp^z = Mg + mg\cos^2\theta = (M + m/4)g = 186.5\,\mathrm{N}$.
3. Ovviamente $t = \ell/v = \Delta z/v\sin\theta = 1.96\,\mathrm{s}$.
4. Muoversi a velocità costante o stare fermi non modifica le accelerazioni. Ragionando nel sistema accelerato, il peso non accelera verso il basso se $\mathbf{a}+\mathbf{g}$ è ortogonale al vincolo, cioè se $g\sin\theta = a\cos\theta$. La forza esterna necessaria è quindi $F = (M + m)a = (M + m)g\tan\theta = 409\,\mathrm{N}$.
5. Siccome non ci sono accelerazioni verticali, vale $(M + m)g = 236\,\mathrm{N}$.

È interessante vedere anche come si risolve il problema usando solo il sistema di riferimento inerziale. Le equazioni del moto sono

$$\begin{aligned} m\ddot{z} &= R\cos\theta - mg \\ m\ddot{x} &= R\sin\theta \\ M\ddot{X} &= -R\sin\theta + F_{\text{ext}} \\ M\ddot{Z} &= P - Mg - R\cos\theta \end{aligned}$$

dove R è la reazione (ortogonale al cuneo) del cuneo sul pesetto e P è la reazione (verticale) del piano d'appoggio orizzontale sul cuneo. La domanda (1) chiede di trovare la forza esterna che tiene fermo il cuneo. Imponendo quindi $\ddot{X} = \ddot{Z} = 0$ e $\ddot{z} = -\ddot{x}\tan\theta$ si trova

$$R = mg\cos\theta, \qquad F_{\text{ext}} = R\sin\theta = mg\cos\theta\sin\theta, \qquad P = Mg + R\cos\theta = (M + m\cos^2\theta)g$$

La domanda (4) chiede di trovare la forza esterna che impedisce lo scorrimento relativo. Imponendo quindi che $\ddot{x} = \ddot{X}$ e $\ddot{z} = \ddot{Z} = 0$ si trova

$$\ddot{x} = \ddot{X} = \frac{F_{\text{ext}}}{m + M} = g\tan\theta, \qquad R = \frac{mg}{\cos\theta}, \qquad P = (m + M)g$$

Esercizio 41: Trabicolo con carrucole su piano inclinato *

(es. 2 del 25/1/94). (Come il precedente ma su un piano inclinato)

✍**Soluzione**: Le equazioni del moto, avendo scelto come assi z e X (rispettivamente ortogonali e paralleli al piano inclinato ed orientati verso l'alto ed a destra) sono

$$m\ddot{z} = \tau - mg\cos\theta, \qquad (m + M)\ddot{X} = -2\tau + (M + m)g\sin\theta + F_{\text{ext}}, \qquad \ddot{z} = +2\ddot{X}$$

1. Per avere $\ddot{X} = 0$ occorre $F_{\text{ext}} = 2mg\cos\theta - (M + m)g\sin\theta = 13.8\,\mathrm{N}$.
2. Risolvendo per $\ddot{X}$ si trova $-\ddot{X} = (2mg\cos\theta - (m + M)\sin\theta)/(M + 5m) = 0.636\,\mathrm{m/s^2}$;
3. La reazione del piano vincolare è $Mg\cos\theta + \tau = 03.9\,\mathrm{N}$.

Capitolo 6

Soluzione di equazioni del moto

Esercizio 42: Equazione differenziale della molla

Giochetti con l'equazione differenziale della molla

✍**Soluzione**: mentre $\ddot{\theta} = -g/r \sin\theta$ non ha soluzioni in termini di funzioni elementari, $m\ddot{x} = kx$ è $x = A\cos(\omega t+\delta)$ con $\omega^2 = k/m = V''(x_{\min})/m$. L'energia della molla $E = \frac{m}{2}\dot{x}^2+\frac{k}{2}x^2$ vale $E = A^2k/2(\sin^2+\cos^2) = A^2k/2$ e quindi è davvero costante.

Aggiungendo una lunghezza a riposo, l'equazione differenziale $m\ddot{x} = -k(x-\ell_0)$ si riduce a quella già risolta usando come variabile $x' = x-\ell_0$. Quindi $x = \ell_0 + A\cos(\omega t+\delta)$.

Mettendo in un campo gravitazionale $m\ddot{x} = -mg + kz$ si risolve nuovamente shiftando rispetto al punto di equlibrio: $x = z - mg/k$.

Assumendo una forza centrale $\mathbf{F} = -kf(r)\mathbf{e}_r = -kf(r)\mathbf{r}/r$ le equazioni del moto

$$m\ddot{x} = -kx\frac{f(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad m\ddot{y} = -ky\frac{f(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

sono un gran macello (anche se $f(r) = 1$, filo in un buco) a meno che $f(r) = r$ (molla con lunghezza a riposo nulla). In tal caso $m\ddot{x}_i = -kx_i$ e $x_i = A_i\cos(\omega t+\delta_i)$. È ovvio che l'energia è costante in quanto $E = E_x + E_y$. Esiste una seconda costante del moto

$$L_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}) = m\omega A_x A_y[\sin(\omega t+\delta_x)\cos(\omega t+\delta_y) - \cos(\omega t+\delta_y)\sin(\omega t+\delta_y)] = m\omega A_x A_y \sin(\delta_x - \delta_y)$$

Esercizio 43: Molle in serie ed in parallelo

Si ricavi la costante effettiva di due molle (a) in parallelo (b) in serie.

✍**Soluzione**:
In parallelo è ovvio che $K = k_1 + k_2$ ($K = 2k$ se $k_1 = k_2$). In serie

$$m_1\ddot{x}_1 = k_2x_2 - k_1x_1, \qquad m_2\ddot{x}_2 = F_{\text{ext}} - k_2x_2$$

Quindi la forza esterna necessaria per tenere il sistema *fermo* con allungamento $X = x_1 + x_2 = x_2(1 + k_2/k_1)$ è $F_{\text{ext}} = k_2x_2 = KX$ con $K = k_1k_2/(k_1+k_2)$ ($K = k/2$ se $k_1 = k_2$). Il fatto che due molle siano equivalenti ad una singola molla con opportuno k è vero solo per le proprietà statiche $\ddot{x}_1 = 0$, o se $m_1 = 0$: altrimenti esistono modi di oscillazione non globali. Circuiti in serie ed in parallelo hanno formule simili. Quindi, approssimando un corpo con un insieme di $N_x = S/a^2$ atomi 'in parallelo' e di $N_y = h/a_0$ atomi 'in serie' tenuti assieme da molle k, il corpo si comporta come un elastico di costante $K = kN_x/N_y = kS/h$. Lo stesso k contribuisce a determinare le proprietà dinamiche (modi normali, conduzione termica, elettrica,...).

Esercizio 44: Macchina che accelera con potenza costante

Si scrivano e si risolvano le equazioni del moto di una macchina che accelera con potenza costante W

✍**Soluzione**: In una partenza di F1 è sensato che le macchine accelerino con potenza costante W. La potenza è $W = \dot{K} = m\mathbf{a}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$. È plausibile che una macchina acceleri a potenza costante (non ad accelerazione costante!): quindi $m\ddot{x} = F = W/\dot{x}$. Quando $v \to 0$ $F \to \infty$. Quindi non tutta può essere 'trasmessa a terra' (slittamento ruote) ed c'e'un contraccolpo su di un autobus che parte.

Una soluzione è trovabile provando e riprovando: $x = ct^p$ con $p - 2 = 1 - p$ cioè $p = 3/2$ e $c = \frac{2}{3}\sqrt{2W/m}$ (e quindi $v = \sqrt{2Wt/m} \propto \sqrt{t}$). Si può ottenere per analisi dimensionale: W/m ha $[m] = 0$; $\sqrt{W/m}$ ha $[s]^1[t]^{-3/2}[m]^0$. Questa soluzione ha le condizioni iniziali giuste per una partenza di F1 ($x(0) = \dot{x}(0) = 0$).

Per risolverla conviene riscriverla come $m\dot{v} = W/v$. per risolverla si separano le variabili $mv\,dv = W\,dt$: ovviamente si riscopre $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + Wt$. Scritta in questa forma la soluzione è ovvia: l'energia aumenta in modo costante.

Un corridore che parte con ridardo di τ rispetto al verde ma avanti di ℓ viene raggiunto quando

$$\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2W}{m}}(t-\tau)^{3/2} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2W}{m}}t^{3/2} - \ell$$

E'possibile risolvere questa equazione esattamente ma viene una espressione numericamente instabile. Al primo ordine in τ $\tau = \ell/\sqrt{2Wt/m}$. Per fare una stima non occorre stimare W ed m: $\sqrt{2Wt/m} = v(t)$ è la velocità raggiunta dopo un tempo t. Usando $v(t) \approx 50\,\mathrm{m/s} = 180\,\mathrm{km}/h$ ed $\ell = 5\,\mathrm{m}$ si ha $\tau = 0.1\,\mathrm{s}$.

L'equazione con attrito $m\ddot{x} = W/\dot{x} - S_\perp\rho\dot{x}^2$ richiede integrali troppo difficili. La velocità di regime è $v = (W/S_\perp\rho)^{1/3}$. Cioè diminuire $S_\perp$ aumenta v. Il tempo necessario per accelerare alla velocità di regime non dipende da $S_\perp$.

Esercizio 45: Filo che scivola da un tavolo

Si scriva l'equazione di moto

✍**Soluzione**: Chiamo x la lunghezza della parte penzolante. Allora $m\ddot{x} = mgx/L$ cioè $x = x_0\cosh(t/\tau) + \tau v_0\sinh(t/\tau)$.

Usando l'energia è più difficile: $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + (mx/L)\frac{1}{2}gx$. Si può verificare, dato il moto, che l'energia è costante usando $\sinh^2 = 1 + \cosh^2$.

In presenza di una forza di attrito $F = -\mu(L-x)mg$ le equazioni hanno la forma $\ddot{x} = (x - x_0)/\tau'^2$ risolvibile usando $y = x - x_0$. La cosa interessante è che $\tau' = \tau/\sqrt{1+\mu}$ è più breve: il processo diventa più improvviso.

Esercizio 46: Molla tirata a velocità costante

Un tipo cammina a velocità costante su di un piano con attrito statico μ_s ed attrito dinamico μ_d trascinandosi un peso m tramite una molla di costante k. Calcolare cosa succede.

✍**Soluzione**: All'inizio cammina $x_t = vt$ fino a quando $kvt_0 = \mu_s mg$. A quel punto l'equazione di moto del peso attaccato alla molla è $m\ddot{x} = -k(x - vt) - \mu_d mg\,\mathrm{sign}(\dot{x})$. Per trovare la soluzione uso $x = x' + vt$: in questo sistema inerziale il tiratore è fermo, ma il piano scorre all'indietro: l'equazione del moto diventa $m\ddot{x}' = m\ddot{x} = -kx' - \mu_d mg$ (v è scomparso dall'equazione del moto ma ricompare come condizione iniziale). Conviene scrivere la soluzione generale come

$$x = vt - \frac{\mu_d mg}{k} + A\cos\omega(t - t_0) + B\sin\omega(t - t_0)$$

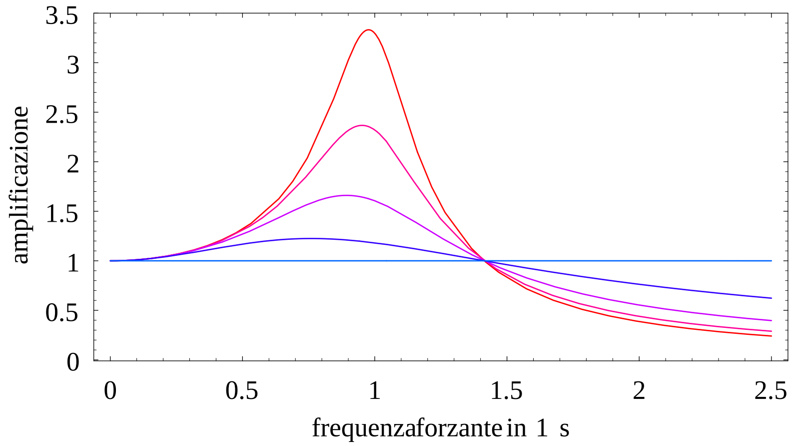


Figura 6.1: 'Amplificazione delle buche' in funzione di ω_f con ammortizzatori con $\omega = 2\pi/\mathrm{s}$ e $\gamma = \{2, 3, 4, 5, \infty\}/\,\mathrm{s}$.

Siccome parte con $\dot{x}(t_0) = 0$ $B = -v/\omega$ è fissato. Se parte da $x(t_0) = 0$ $A = \frac{\mu_d mg}{k} - vt_0$ è fissato. Inserendo $t_0 = \mu_s g/\omega^2 v$

$$x(t) = v(t - t_0) + \frac{g}{\omega^2}(\mu_d - \mu_s)[\cos\omega(t - t_0) - 1] - \frac{v}{\omega}\sin\omega(t - t_0)$$

Possono accadere due cose:

- se $\mu_s = \mu_d$ la massa non torna mai indietro e rimane sempre dietro il tiratore. Si ferma ($\dot{x} \to 0$) per $\omega(t - t_0) = 2n\pi$.
- Se $\mu_s > \mu_d$ allora ad un certo istante la massa si ferma. A questo punto la soluzione direbbe scorrettamente che torna indietro. Sostituendo μ_d con μ_s nell'equazione rimane fermo ed il ciclo si ripete (con periodo maggiore di $2\pi/\omega$).
- Se $\mu_s \sim 2\mu_d$ (per 'g grande') il corpo riacchiappa il tiratore.
- Se $\mu_s \gtrsim 2\mu_d$ gli da una botta da dietro (o lo supera e poi si ferma).

Esercizio 47: Oscillazioni forzate

Trovare il moto asintotico di una molla smorzata in presenza di una forza esterna periodica.

✍**Soluzione**: Cerco un soluzione particolare di $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega^2 x = a\sin\omega_f t$. Usando $e^{i\gamma t}$ i calcoli si semplificano, ma non lo faremo (Posto $f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$ si ha $f' = if$ e $f(0) = 1$, quindi $f = e^{i\theta}$.). Provo ad inserire $x = b\sin(\omega_f t + \delta)$ e trovo

$$b[\gamma\omega_f\cos\delta + (\omega^2 - \omega_f^2)\sin\delta]\cos(\omega_f t) + [b(\omega^2 - \omega_f^2)\cos\delta - b\gamma\omega_f\sin\delta - a]\sin(\omega_f t) = 0$$

da cui

$$b = \frac{a}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_f^2)^2 + \gamma^2\omega_f^2}}, \qquad \tan\delta = \frac{\gamma\omega_f}{\omega^2 - \omega_f^2}$$

Il conto viene semplice se $\gamma = 0$: in tal caso $\delta = 0$.

La soluzione generale si riduce a questa per grande $t \gg 1/\omega, \gamma$.

Esercizio 48: Oscillazioni forzate: sospensioni automobile

Si spieghi a cosa servono e come funzionano gli ammortizzatori

✍**Soluzione**: Scriviamo le equazioni del moto 'verticali' per macchina (Z) e ruota (z):

$$m\ddot{z} = -F + F_{\text{ext}}, \qquad M\ddot{Z} = -Mg + F, \qquad F = k(z - Z) + \gamma M(\dot{z} - \dot{Z})$$

dove F è la forza esercitata dall'ammortizzatore. La prima equazione non serve a niente, perchè si suppone che $z(t)$ sia noto. Si suppone cioè che la macchina si muova a velocità costante $x = vt$ lungo una strada con profilo $z(x) = h\sin(x/\ell) = h\sin(\omega_f t)$ con $\omega_f = v/\ell$. Quindi, riassorbendo $-Mg$ in uno shift di Z

$$\ddot{Z} + \gamma Z + \omega^2 Z = \omega^2 z + \gamma\dot{z} = h\sqrt{\omega^4 + (\gamma\omega_f)^2}\sin(\omega_f t + \varphi)$$

In conclusione l'abitacolo oscilla con frequenza ω_f ed ampiezza

$$\frac{Z}{h} = \sqrt{\frac{\omega^4 + (\gamma\omega_f)^2}{(\omega^2 - \omega_f^2)^2 + (\gamma\omega_f)^2}} = \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{se } \omega_f \ll \omega \\ \sqrt{1 + (\omega/\gamma)^2} & \text{se } \omega_f = \omega \\ (\omega/\omega_f)^2 & \text{se } \omega_f \gg \omega, \gamma \end{array}\right.$$

Ad esempio Se v è tale che $\omega_f = \omega$ (dove ω è la frequenza della molla usata per ammortizzare) sono guai, a meno che γ non sia abbastanza grande. Una qualunque strada è 'rappresentabile' come somma di $\sin(\omega_n t)$.

Stimiamo i valori di k e γ per una tipica macchina di massa $M = 10^3\,\text{kg}$. Saltandoci sopra in un secondo si smorza, senza fare neanche una oscillazione. Quindi $T \sim 1\,\text{s}$ e $\gamma \sim \omega = 2\pi/T \sim 10/\text{s}$ e $k = M\omega^2 = 10^5\,\text{N/m}$. Il numero è sensato: se una persona di massa $m = 10^2\,\text{kg}$ monta in macchina, la macchina si abbassa di $mk/k = 1\,\text{cm}$. Scegliendo in modo diverso il modo in cui F dipende da $z - Z$ è possibile ammortizzare molto meglio ('ammortizzatori attivi').

Esercizio 49: Moto di un razzo

Si scrivano e si risolvano le equazioni del moto di un razzo che lancia massa con velocità $-v_r$

✍**Soluzione**: Per la legge di azione/reazione, cioè per la conservazione dell'impulso $dmv_r = mdv$ (per comodità v_r è orientata all'inidietro). Se non si divide per dt si ottiene $dv = v_r dm/m$ cioè $v_1 - v_0 = v_r \ln(m_0/m_1)$. Dividendo per dt si ha $F_R = v_r\dot{m}$, cioè una forza costante (se $\dot{m}$ è costante). Questo non implica una accelerazione costante: $a(t) = (F_R - mg)/m(t) = v_r\dot{m}/(m_1 - \dot{m}t) - g$ cioè $v(t) = v(0) + v_r\ln[m(0)/m(t)] - gt$. Per $g = 0$ coincide con il risultato precedente. Integrando (usando $\int \ln(k-x) = -x - (k-x)\ln(k-x)$) si ottiene $z(t) = z_0 - \frac{1}{2}gt^2 + t(v_0 + v_r) - m(t)v_r/\dot{m}\ln[m_0/m(t)]$. Se $v_r = -2500\,\text{m/s}$ in $150\,\text{s}$.

Se $m_0 = 1.2\ 10^6\,\text{kg}$, $\dot{m} = 10^6\,\text{kg}/100\,\text{s}$, e $v_r = 10^3\,\text{m/s}$ all'istante $t_1 = 100\,\text{s}$ ha raggiunto $z(t_1) = 78\,\text{km}$ con velocità $v(t_1) = 2.58\,\text{km/s}$. A questo punto $g = g(z)$.

Nota Usando gli integrali posso scrivere esplicitamente la conservazione dell'impulso: $p(t) = m(t)v(t) + \int_0^t \dot{m}(v(t') - v_R)dt'$. Calcolando dp capisco meglio perchè non devo includere $v\ dm$: si cancella fra i due membri.

IIn pratica la spinta necessaria per far muovere un razzo la si ottiene bruciando qualche carburante, per cui possiamo scrivere l'energia ottenuta come $\frac{1}{2}mv^2 = \alpha_m m$, dove v è la velocità delle particelle ed α_m è una costante che dipende dal carburante, dal tipo di reazione, dall'efficienza, etc. La forza prodotta è $\propto mv \propto m\sqrt{\alpha_m}$. Sembrerebbe più efficiente usare atomi pesanti; in realtà razzi che partono da terra bruciano idrogeno perchè ha un grande α ed è più ecologico.

!**Paradosso del razzo**: usando una potenza W ooprunta un razzo può rimanere sospeso in aria. Se ha velocità costante v_0 la sua energia è $E = mgv_0t - W$: apparentemente per v_0 abbastanza grande creo energia. Ovviamente non funziona perchè m non è costante: serve $\dot{m}v_R = mg$. Allora provo a tenerlo sospeso in aria usando $v_R \to \infty$ e $\dot{m} \to 0$. Non funziona lo stesso perchè in questo limite $W = \dot{m}v_R^2/2 \to \infty$.

Esercizio 50: Cannoncino a molla

Sopra una molla di lunghezza a riposo ℓ_0 ed attaccata al pavimento c'è un pistone di massa M e sul pistone c'è un dischetto di massa m. La molla viene compressa di ℓ_0 e rilasciata. Quale è il valore minimo di k tale che il dischetto si distacca? Se $k = 2k_{\rm min}$ quale è la massima altezza raggiunta?

✍**Soluzione**: Ovviamente serve $k\ell_0 > (M+m)g$, altrimenti la molla non si muove nemmeno. Però non basta. Le equazioni del moto per il corpo (z) e l'attacco della molla (M) sono:

$$m\ddot{z} = -mg + R, \qquad M\ddot{Z} = -Mg - R + k(\ell_0 - Z)$$

Notare che sul corpo non agisce la forza della molla. Finchè rimangono attaccati $z = Z$ e $R \geq 0$, quindi

$$\ddot{Z} = \ddot{z} = -g + k\frac{\ell_0 - z}{m+M}, \qquad R = \frac{km}{m+M}(\ell_0 - z)$$

Quindi il distacco $R < 0$ avviene a $z > \ell_0$ (cioè quando la molla inizia a richimare, si vede a occhio che $R = 0$ quando la molla non fa forza), posto che la molla Usando la conservazione dell'energia (o la soluzione esplicita delle equazioni del moto) a quell'istante $E(z = \ell_0) = \frac{1}{2}(m+M)v^2 = E(z = 0, v = 0) = \frac{1}{2}k\ell_0^2 - (m+M)g\ell_0$. Quindi la molla è abbastanza forte da riuscire a sollevare i due pesi di $\Delta z = \ell_0$ se $k > k_{\rm min} = 2g(m+M)/\ell_0$ ($= 4mg/\ell_0$ se $m = M$, come ovvio da considerazioni geometriche). Il corpo sale di

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{\ell^2(k - k_{\rm min})}{2g(m+M)} = \ell\alpha$$

oltre il punto di distacco se $k = (1+\alpha)k_{\rm min}$.

Esercizio 51: Saltello su molla

Identico al primo, ma con geometria diversa. Una molla collega due corpi di massa m disposti in verticale. Quello in basso è appoggiato su di un tavolo. Quale deve essere il $k_{\rm min}$ della molla tale che comprimendola tutta e rilasciandola da ferma, il corpo sotto prende il volo?

✍**Soluzione**: L'equazione di moto del corpo in Basso $m\ddot{z}_B = -mg + k(z_A - \ell_0) + R$ con $R > 0$ dice che esso si distacca quando $z - \ell_0 \geq mg/k$. Quando appoggio m sopra la molla libera, il punto di equilibrio è $\ell_0 - mg/k$. Quindi con semplici considerazioni geometriche si può dire che $k_{\rm min} = 3mg/\ell_0$.

Procedendo con la conservazione dell'energia:

$$E_I = \frac{k}{2}\ell_0^2 = E_F = mg(\ell_0 + \frac{mg}{k}) + \frac{k}{2}(\frac{mg}{k})^2$$

Sembra una complicata equazione di II grado in k. Se la raccogliamo come $mg(\ell_0 + mg/k) = \frac{k}{2}[\ell_0^2 - (mg/k)^2] = \frac{k}{2}(\ell_0 + mg/k)(\ell_0 - mg/k)$ (oppure se usiamo la soluzione generale di un'equazione di II grado) si trova la soluzione fisica $k = 3mg/\ell_0$.

Il moto successivo al distacco è...

Esercizio 52: Velocità di una goccia di pioggia

Si calcoli la velocità di caduta di una goccia di pioggia di raggio r

✍**Soluzione**: L'equazione del moto è (asse orientato verso il basso)

$$m\ddot{z} = (m - m_{\rm aria})g - \gamma\eta\, v + wS_\perp\rho\, v^2$$

dove il termine proporzionale alla massa dell'aria spostata $m_{\rm aria} = \frac{4}{3}\pi r^3\rho_{\rm aria}$ è la trascurabile forza di Archimede. La forza di attrito $\propto v$ è dominante solo a velocità molto basse: γ dipende sola dalla forza del corpo ($\gamma = 6\pi r$ ('legge di Stokes') e $w = \frac{4}{3}$ per una sfera, se uno trascura il fatto che il passaggio della sfera modifica la densità dell'aria), mentre il coefficiente di viscosità η dipende solo dal fluido ($\eta = 10^{-3}\,{\rm kg/\,m\,s}$ nell'acqua e $\eta = 1.8\ 10^{-5}\,{\rm kg/\,m\,s}$ nell'aria).

1 La soluzione di $\dot{v} = g - v/\tau$ è $v(t) = v_{\rm lim} + (v_0 - v_{\rm lim})\ e^{-t/\tau}$ con $v_{\rm lim} = g\tau$. L'equazione è a variabili separabili: $dv/(1 - v/g\tau) = g\ dt$, e $\int dv/(1 - av) = -\ln(av - 1)/a$.

2 La soluzione di $\dot{v} = g - \kappa v^2$ è $v(t) = v_{\rm lim} \tanh[\sqrt{g\kappa}t - c_1]$, con $v_{\rm lim} = \sqrt{g/\kappa}$. Per verificarlo basta sapere che $D \tanh t = 1 + \tanh^2 t$. L'equazione è a variabili separabili: $dv/(1 - v/g\tau) = g\ dt$, e $\int dv/(1 - a^2v^2) = \operatorname{arctanh}(av)/a$. Esprimere in funzione di v_0 allungherebbe un po'.

3 La soluzione di $\dot{v} = g - v/\tau - \kappa v$ è $v(t) = [-1 + \sqrt{-1 - 4g\kappa\tau^2} \tan(\frac{\sqrt{-1-4g\kappa\tau^2}(-t\kappa+c_1)}{2\kappa\tau})]/(2\kappa\tau)$. L'equazione è a variabili separabili. $\int dv/(1 - av - bv^2) = -2 \arctan((a + 2bv)/\Delta)/\Delta$.

L'attrito lineare in v è trascurabile per una goccia normale. Per un 'pianetto' $w = 2$. Per una sfera $F/\rho = 2\pi r^2 v \int \Delta v(\theta) d\cos\theta = 2\pi r^2 \frac{2}{3} v^2 = \frac{1}{3} S_{\rm sfera} v^2 = \frac{4}{3} S_\perp v^2$ dove $\Delta v = v(1 + \cos 2\theta)$. Quindi

$$v_{\rm lim} = \sqrt{\frac{mg}{\frac{4}{3}\pi r^2 \rho_{\rm aria}}} = \sqrt{\frac{gr\rho_{\rm acqua}}{\rho_{\rm aria}}} = 2.7\frac{\rm m}{\rm s}(\frac{r}{1\,\rm mm})^{1/2}, \qquad \tau \approx \sqrt{\frac{m}{gwS\rho_{\rm aria}}} = 0.27\,{\rm s}(\frac{r}{1\,\rm mm})^{1/2}.$$

Invece la forza di Stokes inizia a contare solo se $r < 0.08\,\rm mm$: da sola darebbe

$$v_{\rm lim} = \frac{mg}{\eta\gamma} = 123\frac{\rm m}{\rm s}(\frac{r}{1\,\rm mm})^2 \qquad \text{raggiunta in un tempo } \tau = \frac{m}{\eta\gamma} = 12\,{\rm s}(\frac{r}{1\,\rm mm})^2$$

Per una *particella di polline* con $r = 2\,\mu\rm m$ e densità $\rho_{\rm polline} = 2\ \rho_{\rm acqua}$ domina la forza di Stokes che dà $v_{\rm lim} = 1\ 10^{-3}\,\rm m/\,s$ ($\tau \sim 10^{-4}\,\rm s$). Quindi un grano di polline che cade da un albero alto $h = 5\,\rm m$, in presenza di vento con velocità $v_{\rm vento} = 30\,\rm km/\,h$ percorre $\ell = hv_{\rm vento}/v_{\rm lim} \sim 40\,\rm km$.

Capitolo 7

Urti

Esercizio 53: Urto perfettamente inelastico

Si calcoli l'energia dissipata in un un urto perfettamente anelastico fra m_1 ed m_2 in moto con velocità $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$

✍**Soluzione**: Chiamando $\mu = m_1 m_2/(m_1+m_2)$ la 'massa ridotta' dopo l'urto si ha $v_2' = v_1' = (m_1 v_1 + m_2 v_2)/(m_1+m_2)$. L'energia dissipata vale $\Delta E = E' - E = -\mu(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)^2/2$.

Andiamo a vedere chi compie questo lavoro: $\Delta E = \sum \Delta E_i = \sum \int \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i \, dt$ dove $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$ sono le forze impulsive, che producono $\int \mathbf{F}_i \, dt = \Delta \mathbf{p}_i$. Quindi dovrebbe essere $\Delta E_i = \Delta \mathbf{p}_i \cdot \langle \mathbf{v}_i \rangle$ dove $\langle \mathbf{v}_i \rangle$ è una qualche 'velocità media durante l'urto'. Infatti un calcolo esplicito mostra che

$$\Delta p_1 = \mu(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1), \qquad \Delta E_1 = \mu(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)\frac{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1'}{2} = \Delta \mathbf{p}_1 \cdot \frac{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1'}{2}$$

e similmente per la seconda particella. Per $m_2 \to \infty$ e $v_2 = 0$ si ottiene l'urto di m_1 contro un muro di massa infinita. In un urto elastico deve essere $\langle \mathbf{v}_1 \rangle = 0$: quindi m_1 rimbalza con $v_{1z}' = -v_{1z}$ dove z è la direzione lungo la quale $\Delta p_{1z} \neq 0$.

Esercizio 54: Detezione materia oscura

Un possibile modo di rilevare dark matter sotto forma di neutralini di massa m è misurare l'energia presa da nuclei di massa M in urti

✍**Soluzione**: Le curve di rotazione della galassia (il sole gira a $232\,\mathrm{km/s}$, la terra gira attorno al sole con $v_{TS} = 30\,\mathrm{km/s}$) indicano materia oscura con $\rho \sim 0.3 m_p/\mathrm{cm}^3 \sim 10^5 \rho_{\rm cr}$.

$$m\mathbf{v} = m\mathbf{v}' + M\mathbf{V}', \qquad \frac{m}{2}v^2 = \frac{m}{2}v'^2 + \frac{M}{2}V'^2$$

Dalla conservazione dell'impulso ricavo $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}M/m$ che inserito nella equazione di conservazione dell'energia fornisce $(m+M)MV'^2/2m = M\mathbf{V}'\cdot\mathbf{v} = MV'v\cos\theta$ In approssimazione 1-dimensionale angolo di scatering $\cos\theta = 1$. Le soluzioni sono $V' = 0$ (niente urto) e

$$V' = \cos^2\theta \frac{2mv}{m+M} \qquad : \qquad K \equiv \frac{M}{2}V'^2 = \cos^2\theta \frac{4mM}{(m+M)^2}K_{\rm in} \qquad (K_{\rm in} = \frac{m}{2}u^2)$$

La funzione $K/K_{\rm in} = 4r/(1+r^2)$ è massima (ed ovviamente vale 1) per $r \equiv M/m = 1$. Per $v = 232\,\mathrm{km/s}$ (velocità di rotazione del sole, non relativistica) e $M = m = 100\,\mathrm{GeV}$ si ha $E = 30\,\mathrm{keV}$.

ISe tengo conto che la conservazione del momento angolare impone che l'urto avvenga in un piano (ortogonale a $\mathbf{L}$) ho $4-3=1$ variabile libera (l'angolo di scattering). In questo caso $\mathbf{L}$ non serve in quanto $\mathbf{V} = 0$ (sistema del lab). La conservazione di $\mathbf{L}$ è infatti legata alla possibilità di usare il sistema del lab. *Se esistessero ulteriori leggi di conservazione di quantità cinematiche ogni scattering sarebbe banale.*

Calcolo relativistico Prendendo il modulo di $P'_N = P_N - P_p - P'_p$ ottengo

$$E'_p - m_p = \frac{2\cos^2\theta(E_N^2 - m^2)m_p}{(E_N + M)^2 - \cos^2\theta(E_N^2 - m^2)} \approx \cos^2\theta \frac{4mM}{(m+M)^2}(E_N - m)(1 + \mathcal{O}(\frac{E_n - m}{m+M}))$$

Per $\cos\theta = 1$ $E'_p = (p_N^2/2m)(4Mm/(m^2 + M^2 + 2ME_N))$.

Esercizio 55: Sistema del centro di massa

Si leghi energia, etc di due particelle a quelle nel loro CM

✍**Soluzione**: Domanda: quale è la massima energia dissipabile in un urto fra due particelle? Siccome $\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ si conserva $\Delta E \leq E$. Si può procedere matematicamente, ma conviene usare il CM, rispetto al quale $\mathbf{P}_{\rm CM} = 0$. Nel CM la risposta è ovvia: l'energia massima viene dissipata in un urto 'perfettamente anelastico', cioè quando dopo l'urto le due masse rimangono attaccate (e ferme rispetto al CM). Quindi $\Delta E_{\max} = K_{\rm CM}$ (questo non significa che l'energia non si conserva).

1. Lego K_S (energia cinetica rispetto an un riferimento S) a $K_{\rm CM}$. Sostituendo $\mathbf{v}_i = \mathbf{V}_{\rm CM} + \mathbf{v}_{i\rm CM}$

$$K_S = \frac{m_1}{2}\mathbf{v}_1^2 + \frac{m_1}{2}\mathbf{v}_2^2 = \frac{m_1 + m_2}{2}\mathbf{V}_{\rm CM}^2 + \mathbf{V}_{\rm CM}\cdot\mathbf{P}_{\rm CM} + \frac{m_1}{2}\mathbf{v}_{1\rm CM}^2 + \frac{m_1}{2}\mathbf{v}_{2\rm CM}^2 = K_{{\rm CM}/S} + 0 + K_{\rm CM}$$

2. È possibile riscrivere $K_{\rm CM}$ in termini delle velocità relative. Siccome $\mathbf{P}_{\rm CM} = m_1\mathbf{v}_{1\rm CM} + m_2\mathbf{v}_{2\rm CM} = 0$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_{1\rm CM} - \mathbf{v}_{2\rm CM} = \mathbf{v}_{1\rm CM}(1 + \frac{m_1}{m_2}) \qquad : \qquad \mathbf{v}_{1\rm CM} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{v}$$

   Quindi

$$K_{\rm CM} = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}(m_2 + m_1)\mathbf{v}^2 = \frac{\mu}{2}\mathbf{v}^2, \qquad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

3. Con calcoli più lunghi si poteva arrivare allo stesso risultato esprimendo le due velocità $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ in termini di $\mathbf{V}_{\rm CM}$ e $\mathbf{v}$

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{V}_{\rm CM} - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{v}, \qquad \mathbf{v}_2 = \mathbf{V}_{\rm CM} + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{v}$$

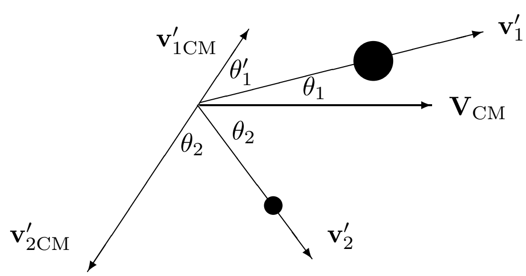
4. In modo analogo il momento angolare si può riscrivere come

$$\mathbf{L}_S = m_1\mathbf{x}_1 \times \mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{x}_2 \times \mathbf{v}_2 = (m_1 + m_2)\mathbf{X}_{\rm CM} \times \mathbf{V}_{\rm CM} + \mu\mathbf{x} \times \mathbf{v} = \mathbf{L}_{{\rm CM}/S} + \mathbf{L}_{\rm CM}$$

Esercizio 56: Urti elastici

Un corpo di massa m_1 collide elasticamente con un corpo fermo di massa m_2. Dopo l'urto i due corpi si muovono con velocità θ_1 e θ_2 con la direzione originale di 1. Sfruttando il CM si mostrare che (1) Se $m_1 = m_2$ $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$; (2) Se $m_1 > m_2$ $\sin\theta_{1\,\max} = m_2/m_1$; (3) Se $m_1 \ll m_2$ $\theta_1 \approx \pi - 2\theta_2$

✍**Soluzione**:



Nel CM è ovvio come conservare impulso ed energia: $v'_{i\rm CM} = v_{i\rm CM}$, ma girato di un angolo $\theta_{\rm CM}$. Per passare al sistema lab $\mathbf{v}_{i\rm lab} = \mathbf{v}_{i\rm CM} + \mathbf{V}_{\rm CM/lab}$ dove $\mathbf{V}_{\rm CM/lab} = m_1\mathbf{v}_1/(m_1 + m_2) = -\mathbf{v}_{2\rm CM}$ (quindi i due angoli θ_2 sono uguali). e quindi $\mathbf{v}_{1\rm CM} = m_2\mathbf{v}/(m_1 + m_2)$.

(1) Se $m_1 = m_2$ $v_{1\rm CM} = V_{\rm CM}$ e quindi $\theta'_1 = \theta_1$. Siccome $\theta_2 + \theta_2 + \theta_1 + \theta'_1 = \pi$ si scopre che $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$, cioè che le due masse si muovono ad angolo retto dopo la collisione.

(2) È quasi uguale all'esercizio col nuotatore e la cascata: la direzione (ma non il modulo) di $\mathbf{v}'_{1\rm CM}$ è arbitraria, e quindi forma una circonferenza. L'angolo θ_1 è massimo quando $\mathbf{v}'_1$ è tangente ad essa: quindi $\sin\theta_{1\,\max} = m_2/m_1$.

(3) Se $m_1 \ll m_2$ θ'_1 è molto piccolo. Quindi $\pi \approx 2\theta_2 + \theta_1$.

Esercizio 57: Estinzione dinosauri

Si stimi l'energia d'impatto dell'asteroide o cometa caduto 65 Myr fa (limite fra le ere mesozoico/cenozoico, limite KT fra i periodi createco/terziario) a Puerto Chicxulub (messico nord-orientale).

✍**Soluzione**:

$r_T = 1.6\ 10^{11}\,\mathrm{m}$	$r_A = 5\ 10^{11}\,\mathrm{m}$	$G = 6.67\ 10^{-11}\ \mathrm{m^3/\,kg\,s}$
$R_T = 6370\,\mathrm{km}$	$R_{\rm ast} \approx 5\,\mathrm{km}$	$\rho_{\rm ast} \sim 3$
$m_T = 5.97\ 10^{24}\,\mathrm{kg}$	$m_{\rm ast} = 1.5\ 10^{15}\,\mathrm{kg}$	$M_{\rm sole} = 1.99\ 10^{30}\,\mathrm{kg}$
$v_T = 28.8\,\mathrm{km/\,s}$	$v_A = 23.0\,\mathrm{km}/s$	

L'energia rilasciata in un urto anelastico è $\frac{\mu}{2}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2$; qui $m_{\rm ast} \ll m_T$. Sicuramente la velocità d'impatto è $v > v_F = (2GM_E/R_E)^{1/2} = 11\,\mathrm{km/\,s}$ (velocità di fuga). Essa produce un urto con energia $Gm_T m_A/R_T = 10^6\,\mathrm{kg}\,c^2$. Una cometa arriva dall'infinito con velocità $v_\rho = 40\,\mathrm{km}/s$. La velocità orbitale della terra è $v_{\rm terra} = 28\,\mathrm{km/\,s}$. Per un asteroide:

- **L'urto minore** si ha per $\alpha = \alpha_{\max}$ cioè $\cos\theta = -1$: in questo caso l'asteroide ha $v_\rho = 0$ e $v_\theta = \alpha_{\max}\sqrt{GM/r_A}(r_A/r_T) = 35.5\,\mathrm{km/\,s}$, cioè $v_{\rm urto} = 6.6\,\mathrm{km}/s$ ed $E_{\rm urto} = (0.38 + 1.1)\,10^6\,\mathrm{kg}\,c^2$.
- **L'urto maggiore** si ha per $\alpha = 0$ cioè $\cos\theta = 1$: in questo caso l'asteroide ha $v_\rho = (2GM_{\rm sole}(1/r_T - 1/r_A))^{1/2} = 33.6\,\mathrm{km}/s$ e $v_\theta = 0$, cioè $v_{\rm urto} = 44\,\mathrm{km}/s$ ed $E_{\rm urto} = (17.1 + 1.1)\,\mathrm{ton}\,c^2$.

Se $\rho = r_M/(1 - e\cos\theta)$ allora

$$v_\rho = -\frac{eL}{mr_M}\sin\theta, \qquad v_\theta = \frac{L}{m\rho} = \frac{L}{mr_M}(1 - e\cos\theta)$$

Invece di E, L vogliamo usare come parametri r_A (il raggio di apogeo) e $v_A = \alpha\sqrt{GM/r_A}$ (se $\alpha = 1$ la velocità di apogeo è quella che di un orbita circolare. La destabilizzazione dell'orbita dell'asteroide produce $\alpha < 1$.). Quindi $L = mr_A v_A$, $r_M = (v_A r_A)^2/GM = \alpha^2 r_A$ e $e = 1 - v_A^2 r_A/GM = 1 - \alpha^2 \le 1$.. Con questi parametri

$$v_\rho = -\sqrt{\frac{GM}{r_A}}\frac{1-\alpha^2}{\alpha}\sin\theta, \qquad v_\theta = \sqrt{\frac{GM}{r_A}}\frac{1 - (1-\alpha^2)\cos\theta}{\alpha}$$

con $\sqrt{GM/r_A} = 16\,\mathrm{km/\,s}$, mentre la terra ha una velocità $v_T = 28.8\,\mathrm{km}/s$. L'urto avviene se $\rho = r_M/(1+e) = r_A\alpha^2/(2+\alpha^2) \le d_{TS}$ cioè per $\alpha^2 < 2(d_{TS}/r_A)/(1 + d_{TS}/r_A) \approx 0.48$ ($\alpha < 0.696$). In questo caso l'asteroide urta la terra quando $\rho = d_{TS}$ cioè per

$$\cos\theta = \frac{1}{e}(1 - \frac{r_M}{d_{TS}}) = \frac{1 - \alpha^2 r_A/d_{TS}}{1-\alpha^2}$$

L'energia dell'urto è una funzione facile da calcolare ma lunghissima da scrivere. In pratica è una retta quasi perfetta $E = E_{\max}(1 - 0.92\alpha/\alpha_{\max}) \sim 10^7\,\mathrm{kg}\,c^2 \sim 10^8\,$megatoni. Effetti: (1) buio e freddo (2) l'ossigeno e l'azoto nell'aria riscaldata si combinano formando NO e con vapor d'acqua pioggie di acido nitrico HNO_3. (3) rocce calcariche ($CaCO_3$) bollendo rilasciano CO_2 (effetto serra).

Esercizio 58: Gravimetro

✍**Soluzione**: $T = T_0(1 + \theta^2/16 + \cdots)$; $\partial z/\partial g = m/k = T^2/(4\pi^2)$.

Capitolo 8

Lavoro e potenziali

Esercizio 59: Sollevamento acqua piovana

Quanto costa all'anno sollevare di $h = 4\,\mathrm{m}$ l'acqua piovuta su $S = 10.000\,\mathrm{m}^2$?

✍**Soluzione**: In un anno piove $p = 0.5\,\mathrm{m}$ per cui il peso totale dell'acqua sollevata è $M = Sp\rho = 5\ 10^6\,\mathrm{kg}$. L'energia necessaria è $E = Mgh = 2\ 10^8\ \ \mathrm{J} \approx 500\mathrm{kWh}$. Un hWk $= 3.6\ 10^6\,\mathrm{J}$ costa $100\mathcal{L}$, quindi ci vogliono $50.000\mathcal{L}$ (una bolletta da 0.5 M$\mathcal{L}$ non è accettabile).

Per mandare in orbita una persona di massa $m = 100\,\mathrm{kg}$ serve $E = \frac{m}{2}v^2$ con $v \sim 10\,\mathrm{km}/s$, per cui $E \approx 0.510^{10}\,\mathrm{J} \sim 1500\,\mathrm{kWh}$. La differenza di potenziale $\Delta V = mMG/r_T$ è equivalente a scalare una montagna mgh con $h = r_T$ (è curioso trovarlo prima numericamente e poi capirlo).

Esercizio 60: Lavoro per tirare un tubo

Calcolare il lavoro necessario per tirare un tubo di lunghezza ℓ e massa m su un terreno inclinato con attrito μ. Dal tubo esce acqua con portata $Q = 1\,\mathrm{kg/\,s}$ e velocità v. Quale forza esercita (ad es. su una molla cge viene compressa)?

✍**Soluzione**: $\mathcal{L} = \mu mg \int_0^\ell (x/\ell)dx = \mu mg\ell/2$. Se il terreno inclinato serve altro lavoro $\mathcal{L} = mg\Delta z_{\mathrm{CM}}$, che è facile ricavare sfruttando il fatto che la gravità è una forza conservativa. $F = vQ$

Esercizio 61: Salto da un asteroide

Un astronauta riesce a sfuggire dall'attrazione gravitazionale di un asteroide saltando. Qual'e' il massimo raggio dell'asteroide assumendo che abbia densità ρ uguale a quella della terra, e che l'altezza di salto sulla terra sia $h = 1\,\mathrm{m}$?

✍**Soluzione**: Sulla terra $\Delta V_{\max} = mgh = \frac{4\pi}{3}Gm\rho R_{\mathrm{terra}}h$. Per sfuggire serve $\Delta V > \frac{4\pi}{3}Gm\rho R_{\mathrm{ast}}^2$. Quindi $R_{\mathrm{ast}} = (R_{\mathrm{terra}}h)^{1/2} \approx 2.5\,\mathrm{km}$.

Esercizio 62: Potenziale terrestre

Si scrivano le superfici equipotenziali della terra

✍**Soluzione**:

$$V(\rho,\theta) = \frac{GM}{\rho}\left\{1 + \frac{\sigma}{2\rho^2}(1 - 3\sin^2\theta)\right\} + \frac{1}{2}\rho^2\omega^2\cos^2\theta$$

dove $\sigma = (I_z - I_{x,y})/M$. Le superfici equipotenziali definiscono un 'geoide'

$$\rho(\theta) = a(1 - \alpha\sin^2\phi), \qquad \alpha = \frac{3\sigma}{2a^2} + \frac{\gamma}{2}, \qquad a = 6378.1600\,\mathrm{km}$$

Quindi

$$g = -\frac{\partial V}{\partial \rho} = \frac{GM}{\rho^2}\left\{1 + \frac{3\sigma}{2\rho^2}(1 - 3\sin^2\theta) - \frac{\omega^2 a^3}{GM}\cos^2\theta\right\} = \frac{V_a^2}{GM}\left\{1 + \beta\sin^2\theta)\right\}$$

dove $\beta = 2\gamma - 3\sigma/2a^2 = 0.0053024$. Quindi $\alpha + \beta = \frac{5}{2}\gamma$ (relazione di Clariaut).

Esercizio 63: Oscillazioni in un buco nella Terra

Quanto tempo ci vuole per cadere da Pisa fino a X attraverso un buco nella Terra, supposta di densità costante?

✍**Soluzione**: La forza di gravità all'interno della Terra vale $g(r) = gr/R_T$ dove g è l'usuale accelerazione di gravità alla superficie, r è la distanza dal centro della terra ed x la coordinata lungo il buco, con origine nel punto di minimo r. Trascurando gli attriti conta solo la $g_\perp$ la accelerazione di gravità parallela al buco che vale $g_\perp = g(r)\cdot x/R = gx/R$. È quindi una forza di tipo elastico, con costante $k/m = \omega^2 = g/R_T$ che non dipende da dove si trova x. Quindi il periodo di oscillazione non dipende da dove si trova X (Madrid? Tokyo?). Per analisi dimensionale il periodo è dello stesso ordine del periodo dell'orbita. In realtà è uguale. Viene $\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{g/R_T} = \sqrt{MG/R_T^3} = 1/800\,\mathrm{s}$ e $T/2 = \pi/\omega = 42$ minuti.

Esercizio 64: Generazione universo

Se l'universo ha una particolare densità, la sua energia totale è zero. Calcolare (stimare) questa densità critica

✍**Soluzione**: L'energia totale di una particella di massa m dentro un universo sferico di raggio R e densità costante ρ è $E = mc^2 - mG\rho\int_0^R \frac{1}{r}4\pi r^2\, dr = m(c^2 - 2\pi G\rho R^2) = 0$. Se uno non sa fare gli integrali è comunque immediato ottenere il risultato a meno del fattore numerico, che tanto è sbagliato perchè non relativistico. Possiamo usare $R = cT$ dove $T \sim 10^{10}\,\mathrm{yr} \approx 0.3\ 10^8\,\mathrm{s}$ è l'età dell'universo perchè roba più lontana non ha ancora avuto tempo di influenzarci (la gravità si propaga a con velocità c). Quindi $E = 0$ se $\rho = \rho_{\rm cr} = c^2/2\pi GR^2 \approx 1/2\pi GT^2 \approx 0.2\ 10^{-25}\,\mathrm{kg/m^3} \approx 10$ protoni$/\mathrm{m^3}$ avendo usato $G = 6\ 10^{-11}\,\mathrm{m^3/kg\,s}$ e $m_p = 1.6\ 10^{-27}\,\mathrm{kg}$. Se $\rho = \rho_{\rm cr}$ è possibile capire come un universo grande si è formato (il doppio di $E = 0$ è $E = 0$). La materia 'osservata' ha densità non molto minore di $\rho_{\rm cr}$; la 'materia oscura' mancante...

Esercizio 65: Decelerazione cosmologica

Breve descrizione in termini di fisica Newtoniana di un aspetto della cosmologia standard che ha avuto importanti sviluppi recentemente.

✍**Soluzione**: Assumendo omogeneità e isotropia $\rho(t) =$ cte e $v = Hr$. Assumiamo che la materia che oggi costituisce l'universo sia non-relativistica:

$$\ddot r = -\frac{4\pi G\rho}{3}r = -\frac{4\pi G}{3}\rho_0 r_0^3\frac{1}{r^2} \qquad : \qquad \frac{1}{2}\dot r^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho_0 r_0^3\frac{1}{r} - \frac{k}{2}$$

dove abbiamo moltiplicato per $\dot r$ per ottere la 'conservazione dell'energia' e chiamato k la costante del moto. Quindi

$$H^2 \equiv \frac{\dot r^2}{r^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{r^2}, \qquad \text{cioè} \qquad \frac{k}{H^2 r^2} = \frac{8\pi G}{3H^2}\rho - 1 \equiv \Omega - 1, \qquad \Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_{\rm cr}}$$

Se $\Omega > 1$ allora $k > 0$ e l'universo si ricontrae. Se $\Omega < 1$ allora $k < 0$ e l'universo si espande per sempre. In relatività generale invece di un ammasso di materia si ottiene un universo senza bordi solo se $k = +1, 0, -1$ (in unità del fattore di scala, non misurato). A meno che $\Omega = 1$ ($k = 0$) si ha un 'quasi assurdo': per avere oggi $\Omega(t_0) = \Omega_0$ non molto diverso da 1 (come è) occorre che quando l'universo era piccolo $r(t) \ll r_0$ doveva essere $\Omega(t)$ piccolissimo o grandissimo.

I valori oggi sono: **Costante di Hubble**: $H_0 = (65 \pm 5)\,\mathrm{km/s\ Mpc}$ (pc $= 3.2$ anni luce). **Densità**: $\Omega_{0\gamma} \sim 10^{-4}$, $\Omega_{0\nu} \gtrsim \Omega_{\rm stelle} \approx 0.005$, $\Omega_{0\rm materia} = 0.05$ (dalla nucleosintesi), $\Omega_{0\rm CDM} \sim 0.5$ (misurato da: 1. materia negli ammass; 2. quantità di particelle non-relativistiche necessarie per dare la giusta forme alle galassie, etc), $\Omega_{\rm totale} = 1 \pm 1$ (misurato da CMB anisotropia. Predetto da: 1. stabilità; 2. inflazione, vedi es. **??**).

Un'altra quantità misurabile è il 'parametro di decelerazione'

$$q \equiv -\frac{r\ddot{r}}{\dot{r}^2} = -\frac{\ddot{r}}{r}\frac{1}{H^2} = \frac{4\pi G\rho}{3H^2} = \frac{1}{2} \qquad \text{se } \Omega = 1, \text{ cioè } k = 0$$

(in un calcolo relativistico $\rho \to \rho + 3p = \rho(1+3w)$. Una misura del 1998, fatta usando supernovae I come candele (cioè assumendo di sapere la loro luminosità totale, misurando la luce ricevuto e deducendo da questo la loro distanza), fornisce $q_0 = -(0.3\pm?)$ invece del valore 'atteso' $q_0 = 1/2$. Possibili spiegazioni: gravità repulsiva a grandi distanze (costante cosmologica); universo non omogeneo.

Capitolo 9

Conservazione energia ed impulso

Esercizio 66: Piano inclinato che scivola

Si scriva l'equazione di moto

✍**Soluzione**: È interessante vedere anche come si risolve il problema usando solo il sistema di riferimento inerziale. Le equazioni del moto sono

$$\begin{aligned} m\ddot{z} &= +R\cos\theta - mg \\ m\ddot{x} &= +R\sin\theta \\ M\ddot{X} &= -R\sin\theta + F_{\rm ext} \\ M\ddot{Z} &= -R\cos\theta - Mg + P \end{aligned}$$

dove R è la reazione (ortogonale al cuneo) del cuneo sul pesetto e P è la reazione (verticale) del piano d'appoggio orizzontale sul cuneo. Il vincolo è $\ddot{z} = -(\ddot{x} - \ddot{X})\tan\theta$ e $\ddot{Z} = 0$ dove θ è l'angolo del cuneo. Risolvendo tutto si trova, in assenza di forza esterna sul cuneo:

$$\ddot{z} = -\frac{g(m+M)s^2}{M+ms^2}, \qquad \ddot{x} = \frac{gM\ sc}{M+ms^2}, \qquad R = \frac{gmMc}{M+ms^2}, \qquad P = \frac{gM(M+m(1-cs))}{M+ms^2}$$

ed ovviamente $M\ddot{X} + m\ddot{x} = 0$. Se $F_{\rm ext} \neq 0$

$$\ddot{z} = sc\frac{F_{\rm ext} - g(m+M)s/c}{M+ms^2}, \qquad \ddot{x} = \frac{F_{\rm ext}s^2 + scgM}{M+ms^2}, \qquad \ddot{X} = \frac{F_{\rm ext} - mg\ sc}{M+ms^2}, \qquad R = \frac{m\ddot{x}}{s}$$

Si ritrovano i valori di $F_{\rm ext}$ per tenere il cuneo fermo; per avere $\ddot{z} = 0$, etc. È utile risolvere un apparente paradosso: se $F_{\rm ext} = g(m+M)s/c$ allora $\ddot{z} = 0$: dando una velocità iniziale $\dot{z}_0$ posso creare o distruggere energia in quanto $V = mgz = mgz_0t$. Non è cosí: $E = K + V$ con $K = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{z}^2)$. Si ha $\ddot{x} = gs/c$ e $\dot{x} = \dot{X}_0 - \frac{c}{s}\dot{z}_0 + \frac{s}{c}gt$: quindi $K = K_0 - \dot{z}_0gmt + \cdots t + \cdots t^2$: la variazione di mgz si cancella. In generale, per una qualunque $F_{\rm ext}$ costante è possibile (ma noioso come calcoli) inserire le soluzioni delle equazioni del moto in $E = K + V$ con $V = mgz - F_{\rm ext}X$ e verificare che E è costante.

Equazioni del moto ricavate dalla conservazione dell'energia Se $F_{\rm ext} = 0$ è possibile dimenticare le forze di reazione inserendo i vincoli in E: sostituendo $z = -(X-x)\tan\theta$ si ottiene

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Z}^2) + mgz = \frac{m}{2c^2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}(M + m\tan^2\theta)\dot{X}^2 - m\tan^2\theta\dot{x}\dot{X} + mg\tan\theta(X-x)$$

quindi

$$\dot{E} = \frac{\dot{x}}{\cos^2\theta}\left\{m\ddot{x} - ms^2\ddot{X} - mg\ cs\right\} + \frac{\dot{X}}{\cos^2\theta}\left\{(Mc^2 + ms^2)\ddot{X} - ms^2\ddot{x} + mg\ cs\right\} = 0$$

I due termini fra parentesi { } devono essere zero. Sommando le due equazioni si ottiene $m\ddot{x} + M\ddot{X} = 0$: eliminando X sia ha nuovamente $\ddot{x} = cs\, gM/(M + ms^2)$. Siccome non sono apparsi termini di tipo $f(x, X)\dot{x}\dot{X}$ in $\dot{E}$ è stato possibile ottenere due equazioni da una sola. In altri casi (ad esempio $E = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2$) non è possibile ed occorre usare le lagrangiane — o la conservazione del momento angolare.

Sostituendo $z = -(X - x)\tan\theta$ e $X = -mx/M$ (cioè $z = x\tan\theta \cdot (m+M)/M$) è avere in partenza un'incognita sola:

$$E = \frac{m(m+M)}{c^2M^2}[\frac{1}{2}\dot{x}^2(M + ms^2) - scx\, gM]$$

Imponendo $\dot{E} = 0$ si ritrovano le equazioni del moto.

Esercizio 67: Carrucola a 2 raggi

Una carrucola di massa 0 (vedi figura) ha $r_1 = 20\,\mathrm{cm}$ e $r_2 = 50\,\mathrm{cm}$. Sui due fili sono appese due masse $m_1 = 2\,\mathrm{kg}$ e $m_2 = 1\,\mathrm{kg}$.

✍**Soluzione**: Per risolvere il problema scrivendo le equazioni del moto occorre usare momenti angolari e momenti delle forze. La conservazione dell'energia fornisce la soluzione senza mai usarli. Basta inserire il vincolo cinematico $r_1z_1 + r_2z_2 =$ cte (che può essere risolto esplicitamente da $z_1 = L_1 - (\frac{3}{2}\pi - \theta)r_1$, $Z_2 = L_2 - (\frac{3}{2}\pi + \theta)r_2)$ in

$$E = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + m_1gz_1 + m_2gz_2 = \frac{1}{2}(m_1r_1^2 + m_2r_2^2)\dot{\theta}^2 + (m_1r_1 - m_2r_2)g$$

per cui $\ddot{\theta} = g(m_1r_1 - m_2r_2)/(m_1r_1^2 + m_2r_2^2)$. Quindi la massa leggera tira su quella pesante se il suo raggio è abbastanza grande, come accade nell'esempio numerico. Se la carrucola avesse massa basterebbe modificare $E \to E + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$.

Le equazioni del moto e l'equazione 'di rotazione' della carrucola $\dot{L} = M$ danno lo stesso risultato:

$$m\ddot{z}_1 = -m_1g + \tau_1, \qquad m\ddot{z}_2 = -m_2g + \tau_2, \qquad I\ddot{\theta} = r_1\tau_1 - r_2\tau_2$$

dove $I = 0$ se trascuro la massa della carrucola. Usando il vincolo cinematico, o meglio parametrizzando $z_1 = r_1\theta$ e $z_2 = -r_2\theta$ si arriva nuovamente all'equazione di moto per θ.

Posso anche considerare come sistema unico le masse insiema alla carrucola. Vale sempre l'equazione $\dot{L} = M$ dove adesso $L = I\dot{\theta} + |m_1r_1v_1| + |m_2r_2v_2| = (I + m_1r^2 + m_2r_2^2)\dot{\theta}$ ed $M = (m_1r_1 - m_2r_2)g$ è prodotto dalle forze esterne.

Esercizio 68: Autosollevamento

Quale forza deve esercitare una persona di massa m_P per sollevare se stessa come disegnato in figura?

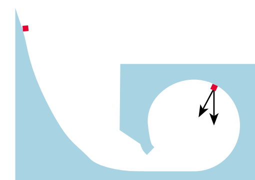
✍**Soluzione**: Chiamando $-R$ la forza eserciata dalla persona di massa m_P, le equazioni del moto sono

$$m_P\ddot{z}_P = -m_Pg + \tau_1 + R, \qquad 0 = \tau_2 - R, \qquad I\ddot{\theta} = r_C(\tau_2 - \tau_1)$$

dove I è il momento di inerzia della carrucola rispetto al centro. Per una carrucola omogenea di massa m_C e raggio r_C $I = \frac{1}{2}m_C r_C^2$. Un segno relativo è impotante. Assumiamo che la persona acceleri verso l'alto e scegliamo il segno di θ in modo che il legame gemetrico sia $r_C\ddot{\theta} = +\ddot{z}_P > 0$. Il segno nell'equazione del moto angolare è giusto, in quanto conferma la cosa ovvia: serve $\tau_2 > \tau_1$ per dare una accelerazione angolare $\ddot{\theta}$ alla carrucola nel verso giusto. Risolvendo il sistema si ottiene $\tau_1 = R - \ddot{z}_P(I/r_C^2)$ (notare che il raggio della carrucola non conta niente) e quindi $2R = m_P g + (m_P + m_C/2)\ddot{z}$. La forza necessaria per stare fermo ($\ddot{z}_P = 0$) è $m_P g/2$; in tale caso la forza eserciata dal sostegno della carrucola vale $\tau_1 + \tau_2 + m_C g = (m_P + m_C)g$.

Esercizio 69: Giro della morte

Si calcoli la velocità minima per compiere un giro della morte lungo una guida di raggio $r = 5\,\mathrm{m}$.



✍**Soluzione**: A prima vista basta scendere da una quota $2r$ per arrivare in cima. Non è cosí. Le equazioni del moto $m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{R}$ sono, in coordinate polari (ricordando che $\mathbf{e}_\rho$ punta verso l'esterno)

$$ma_\rho = -mr\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta + R_\rho, \qquad ma_\theta = r\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$$

La prima equazione fornisce R_ρ: siccome $R_\rho \le 0$ la condizione di non-distacco è

$$-R_\rho = m(r\dot{\theta}^2 + g\cos\theta) \ge 0$$

La seconda equazione è l'equazione del moto. Non è risolvibile in termini di funzioni elementari. Tuttavia moltiplicandola per $\dot{\theta}$ si ottiene la conservazione dell'energia $E = T + V = \frac{1}{2}mv^2 + mgz$ dove $v = r\dot{\theta}$ e $z = r(1-\cos\theta)$ (in modo che $V = 0$ nel punto più basso, dove $\theta = 0$). Per arrivare in cima la velocità sul Fondo deve essere $v_F^2 = 4rg$. Per arrivare in cima senza ribaltarsi serve invece

$$r\dot{\theta}^2(\theta) + g\cos\theta = \frac{v_F^2}{r} - 2g(1-\cos\theta) + g\cos\theta \ge 0 \qquad : \qquad v_F^2 \ge rg(2 - 3\cos\theta) \ge 5rg$$

cioè $v_F \ge 15.8\,\mathrm{m/s} = 57\,\mathrm{km/h}$. Se invece uno parte con velocità $v_F^2 = 4rg$, allora si distacca quando $\cos\theta = -\frac{2}{3}$ (cioè a $\theta = 132°$). Dopo il distacco dal vincolo inizia a seguire una traiettoria parabolica con vertice *sotto* alla quota massima $2r$ perchè parte dell'energia cinetica sta nella velocità orizzontale.

Il problema è identico a quello di un corpo appoggiato sulla cima di una sfera: inizia a scivolare a contatto con la sfera ma allo stesso θ si stacca.). Il problema è identico a quello di un pendolo sostenuto da un filo.

Se invece di un corpo puntiforme uno usasse una pallina che rotola senza strisciare, diventerebbe più difficile scrivere l'energia: vedi compito di Luglio 2000.

Esercizio 70: Rocciatore che cade

[Compito di giugno 1987] Un rocciatore di massa m usa una corda con carico di rottura pari a $R = 25mg$ tale che si allunga elasticamente del $p = 25\%$ e poi raggiunge il carico di rottura. Il rocciatore cade dopo essere salito ad un altezza L sopra al punto di fissaggio più vicino. (a) La corda si spezza? (b) Quale è la quota minima raggiunta nella caduta? (c) Quale è l'acceleazione massima che il rocciatore deve sopportare e come dipende sa L?

✍**Soluzione**: La costante elastica della corda è $kL/4 = 25mg$. Mettendo $V = 0$ nel punto di ancoraggio per la conservazione dell'energia si ha, nel punto di caduta massima (nel quale la velocità è zero)

$$mgL = -mg(L+\delta) + \frac{1}{2}k\delta^2, \qquad \delta = \frac{mg}{k}(1 \pm \sqrt{1 + 4kL/mg}) = L\frac{1+\sqrt{401}}{100} \approx 0.21L$$

Quindi la corda non si rompe mai (se il carico di rottura è maggiore di $18mg$; in generale occorre che $R/mg \ge 2(1 + 2/p)$). La forza massima risentita è alla fine della caduta e vale $k\delta = 100mg(\delta/L) \approx 21mg$ indipendentemente da L. Una corda infinitamente allungabile darebbe la più piccola forza possibile, $2mg$.

Capitolo 10

Moto di un corpo nello spazio

Esercizio 71: Orbite terrestri

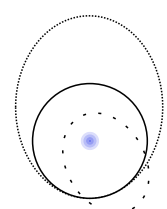
(a) Quanto tempo ci vuole a fare il giro della terra su un orbita bassa? (b) Quale altezza deve avere un satellite gestazionario (sull'equatore)?

✍**Soluzione**: Un'orbita circolare ha $v^2/r = GM/r^2$ cioè $v = \sqrt{GM/r}$. Se $r = r_T + \epsilon$ $v = 7.8\,\mathrm{km}/s$ per cui $T = 2\pi r_T/v = 5000\,\mathrm{s}$.

Imponendo $T = 24\,\mathrm{h}$ si trova $r = (T/2\pi)^{2/3}(GM)^{1/3} = 42200\,\mathrm{km}$ e $v = 3\,\mathrm{km}/s$.

Esercizio 72: Accensione razzi

Un'astronave in orbita circolare a distanza R dal centro della Terra mentre passa per un punto P accende i razzi per un breve momento. Si considerino i due casi nei quali la forza del motore è diretta: ($\perp$) ortogonalmente alla direzione del moto, ($=$) lungo la direzione del moto. Calcolare l'orbita succesiva e dire in quale dei due casi aumenta la distanza minima dalla terra.



✍**Soluzione**: Questo esercizio mostra che il potenziale efficace serve a qualcosa. Nel caso ($\perp$) l'energia aumenta ma il momento angolare non varia. Questo significa che V_{eff} non varia e che $E > \min V_{\text{eff}}$. Il punto di distanza minima, dato dall'intersezione $V_{\text{eff}}(r) = E$, è *minore* di R, anche se i motori esercitano una forza in verso opposto alla Terra. Il punto P non è nè il perigeo nè l'apogeo della nuova orbita (vedi figura).

Nel caso ($=$) aumentano sia l'energia che il momento angolare. Il punto P diventa il punto di distanza minima e l'orbita è completamente esterna al cerchio (eventualmente iperbolica), come qualitativamente disegnato in figura.

Esercizio 73: Forza centrale costante

Un piano orizzontale ha un buco nell'origine, attraverso cui passa un filo di lunghezza ℓ con un peso M sotto ed un peso m sul piano. Si studi il moto del sistema in figura. Se parte da $\rho = \ell/2$, quale è la velocità orbitale massima che può avere affinchè la massa M rimanga sotto il piano?

✍**Soluzione**:

1) Equazioni del moto: Ricavo le equazioni del moto senza usare la conservazione dell'energia: in coordinate cartesiane sarebbe molto calcoloso; in coordinate polari è molto meglio:

$$\begin{aligned} ma_\rho &= m(\ddot\rho - \rho\dot\theta^2) = -\tau \\ ma_\theta &= m(\rho\ddot\theta - 2\dot\rho\dot\theta) = 0 \\ M\ddot z &= \tau - Mg \end{aligned}$$

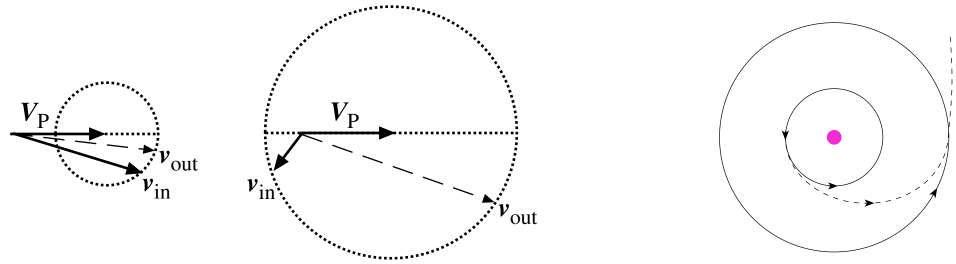


Figura 10.1: *Effetto fionda. Fig.* 10.1*a,b: possibili valori di* $\mathbf{v}_{\rm out}$ *per una interazione con velocità iniziale* $\mathbf{v}_{\rm in}$ *su di un pianeta con velocità* $\mathbf{V}_P$*. Fig.* 10.1*c: traiettoria Terra-Marte-fuga ottimale.*

con $\ddot{z} = \ddot{\rho}$. Elimimando $\tau = M(\ddot{\rho} + g)$ ottengo $(m + M)\ddot{\rho} = -Mg + m\rho\dot{\theta}^2 = -Mg + L^2/m\rho^3$. Una soluzione particolare sono le orbite circolari: $\ddot{\rho} = \dot{\rho} = 0$ per cui $\ddot{\theta} = 0$ e quindi $\dot{\theta}^2 = -F_\rho/m\rho$ (da cui $T^2 \propto \rho^3$ nel sistema solare). L'equazione angolare può essere riscritta come $\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}m\rho^2\dot{\theta} = 0$, ed esprime la conservazione del momento angolare.

2) Energia:

$$E = \frac{m+M}{2}\dot{\rho}^2 + \frac{m}{2}\rho^2\dot{\theta}^2 + Mg\rho$$

Non è possibile dedurre le equazioni del moto da $\dot{E} = 0$ per via del termine cinetico dipendente da ρ:

$$\dot{E} = \dot{\rho}\big[(m+M)\ddot{\rho} - \xi\rho\dot{\theta}^2 + V'\big] + \rho\dot{\theta}\big[m\rho\ddot{\theta} + (m+\xi)\dot{\rho}\dot{\theta}\big]$$

ξ è arbitrario e solo $\xi = m$ dà le equazioni del moto giuste. Usando la conservazione del momento angolare

$$E = \frac{m+M}{2}\dot{\rho}^2 + \frac{L^2}{2m\rho^2} + Mg\rho$$

il problema è evitato.

Se $\rho_0 = \ell/2$, e $\dot{\rho}_0 = 0$ con la velocità v_0 tutta non radiale si ha $L = mv_0\ell/2$ e $E = \frac{1}{2}mv_0^2 + Mg\ell/2$. Nel punto $\rho = \ell$ $E = T_\rho + \frac{1}{8}mv_0^2 + Mg\ell$. Questo punto non viene superato se $v_0^2 < \frac{4}{3}\frac{M}{m}g\ell$.

Esercizio 74: Velocità di fuga ed effetto fionda

Trovare la minima velocità alla quale occorre lanciare una sonda dalla terra affinchè possa sfuggire al campo gravitazionale del sole.

✍**Soluzione**: Con ottima approssimazione le orbite dei pianeti sono circolari; quindi la velocità con cui il pianeta P orbita attorno al sole vale $V_P^2 = GM_S/R_{PS}$. Chiamo v_P la velocità della sonda quando passa in prossimità del pianeta P, e v_{PR} la stessa velocità relativa a P.

A prima vista occorre $v^2 \ge 2\frac{GM_T}{R_T} + 2\frac{GM_S}{R_{TS}} = v_{\rm fuga\ T}^2 + 2V_T^2$ (si sommano le energie di fuga, non le velocità di fuga!) e non importa in quale direzione la sonda viene lanciata. Numericamente le velocità di fuga sono $v_{\rm fuga\ T} = 11\,{\rm km/s}$ e $\sqrt{2}V_T = 41\,{\rm km/s}$.

Siccome la terra gira attorno al sole con velocità non trascurabile, $v_{\rm fuga} = \sqrt{2}v_{\rm orbita}$, si può risparmiare energia. Dimenticando il campo gravitazionale terrestre, la condizione diventa $(\mathbf{v}_{TS} + \mathbf{V}_T)^2 \ge 2V_T^2$. Lanciandola 'in avanti' possiamo levare i vettori, prendere la radice trovando $v_{TS} \ge (\sqrt{2}-1)V_T = 0.41V_T = 12.4\,{\rm km/s}$. Serve solo l'8.5% dell'energia necessaria in assenza della rotazione terrestre. Se volessimo invece mandare una sonda nel sole servirebbe $\mathbf{v}_{TS} = -\mathbf{V}_T$, cioè più energia che per farla fuggire al sole.

IUsando l'*effetto fionda* si può risparmiare altra energia. Per capire cosa è ricordiamo che un corpo che interagisce con un corpo fermo di massa infinita ha in uscita la stessa velocità che aveva in entrata (conservazione dell'energia). La stessa cosa vale ne sistema del CM per due corpi di masse anche comparabili (conservazione dell'energia e dell'impulso). Indicando con $R(\theta)$ una rotazione possiamo scrivere $\mathbf{v}_{\rm out}^{\rm rel} = R\mathbf{v}_{\rm in}^{\rm rel}$. L'angolo θ dipende dai dettagli dell'interazione (forza di interazione, parametro d'impatto,...) e non ci interessa. Se il corpo pesante è in modo con velocità $\mathbf{V}_P$ allora la stessa cosa è vera per la velocità relativa: $\mathbf{v}_i^{\rm rel} = \mathbf{v}_i - \mathbf{V}_P$. In conclusione $\mathbf{v}_{\rm out} = R(\mathbf{v}_{\rm in} - \mathbf{V}_P) + \mathbf{V}_P$ e $|\mathbf{v}_{\rm out}| \neq |\mathbf{v}_{\rm in}|$. Per una rotazione di 180 gradi viene $\mathbf{v}_{\rm out} = 2\mathbf{V}_P - \mathbf{v}_{\rm in}$. Se $\mathbf{v}_{\rm in} = -\mathbf{V}_P$ (urto frontale) $\mathbf{v}_{\rm out} = -3\mathbf{v}_{\rm in}$. Graficamente (vedi fig.): disegnare i due vettori $\mathbf{v}_{\rm in}$ e $\mathbf{V}_P$ ed una circonferenza con centro nella punta di $\mathbf{V}_P$ passante per la punta di $\mathbf{v}_{\rm in}$. Il massimo $v_{\rm out}$ si ha uscendo paralleli a $\mathbf{V}_P$.

Il calcolo della minima velocità di lancio ottenibile sfruttando l'effetto fionda può essere fatto in modo quasi semplice. Per suggire al sole la sonda deve avere velocià rispetto a Marte $v_{SM} > (\sqrt{2}-1)V_M$ in uscita dal campo gravitazionale di Marte (purchè esca nella direzione ottimale). La velocità rispetto a Marte che la sonda ha in uscita da Marte è la stessa che aveva in entrata. Questa può essere calcolata in termini della velocità della sonda usando le coordinate polari, nelle quali $\mathbf{V}_M$ ha solo componente θ in quanto l'orbita di Marte è con ottima approssimazione circolare:

$$v_{SM}^2 = (\mathbf{v}_S - \mathbf{V}_M)^2 = v_{M\rho}^2 + (v_{M\theta} - V_M)^2 = v_M^2 + V_M^2 - 2v_{M\theta}V_M$$

Notare il segno meno: è importante ed è dovuto al fatto che Marte gira nello stesso verso della Terra, e quindi nello stesso verso della sonda.

Dobbiamo adesso calcolare v_M e $v_{M\theta}$ in termini di v_T. Per la conservazione del momento angolare $L_\perp \propto v_\theta r$ si ha $v_{M\theta}R_{MS} = v_{T\theta}R_{TS}$. Se l'astronave è uscita dalla Terra in modo ottimale $v_{T\theta} = v_T$, quindi $v_{M\theta} = \alpha v_T$ dove $\alpha \equiv R_{TS}/R_{MS} \approx 2/3$. Per la conservazione dell'energia

$$\frac{v_T^2}{2} - V_T^2 = \frac{v_M^2}{2} - V_M^2, \qquad : \qquad v_M^2 = v_T^2 + 2(V_M^2 - V_T^2)$$

Mettendo tutto assieme la condizione diventa $v_T^2 + 2(V_M^2 - V_T^2) + V_M^2 - 2\alpha v_T \geq (3-2\sqrt{2})V_M^2$. Usando $V_M = \sqrt{\alpha}V_T$ si riduce a $v_T^2 - 2v_T V_T\alpha^{3/2} - 2V_T^2(\sqrt{2}\alpha - 1) \geq 0$ e quindi

$$v_{ST} = v_T - V_T \geq V_T\left[\alpha^{3/2} - 1 + \sqrt{\alpha^3 + 2 - 2\sqrt{2}\alpha}\right] = 0.446(\sqrt{2}-1)V_T = 0.185V_T = 5.6\frac{\rm km}{\rm s}$$

(la soluzione 'col meno' ha $v_{ST} < 0$) avendo usato $\alpha = R_{TS}/R_{MS} \approx 0.658 \approx 2/3$. Quindi si è risparmiato un altro 80% dell'energia; a questo punto l'energia per sfuggire alla gravità della Terra domina e quindi è inutile cercare di fare altri risparmi con doppi effetti fionda.

Il massimo risparmio ottenibile con un singolo effetto fionda si ha per $\alpha = (9\sqrt{2} - \sqrt{162 - 96\sqrt{2}})/12 \approx 0.63$ e vale $v_{ST}/(\sqrt{2}-1)V_T) = 0.4448$. Marte è quindi messo in posizione perfetta! Un pianeta troppo vicino cambia poco le cose rispetto a partire dalla Terra, un pianeta troppo lontano è inutile appunto perchè è lontano e quindi richiede una notevole energia minima per arrivarci.

Esercizio 75: Filo che si avvolge su perno

Una disco di massa m appoggiato su di un piano senza attriti è connesso ad un capo di un filo. L'altro capo del filo è attaccato ad un perno fisso di raggio r non trascurabile. Si studi il moto.

✍**Soluzione**: Viene fatto come esperienza di laboratorio. In coordinate cartesiane, scegliendo $t = 0$ come il momento nel quale la lunghezza del filo $\ell(t) = r\theta(t)$ è zero, si ha

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{\rm perno} + \mathbf{x}_{\rm filo} = r\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} + r\theta\begin{pmatrix}\sin\theta\\ -\cos\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}r\cos\theta + r\theta\sin\theta\\ r\sin\theta - r\theta\cos\theta\end{pmatrix}, \qquad \dot{\mathbf{x}}(t) = r\theta\dot\theta\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$$

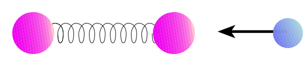
(notare la semplificazione che si ha nella derivata). Quindi $\tau\cdot\mathbf{v} = \tau v\ \hat{\mathbf{x}}_{\rm filo}\cdot\hat{\mathbf{x}}_{\rm perno} = 0$ e l'energia è costante, come doveva essere. Quindi $\theta\dot\theta = v_0/r$: separando le variabili (o riscrivendo come $\frac{d}{dt}\theta^2 = 2v_0/r$) si ottiene $\theta(t) = \sqrt{2v_0t/r}$. Per grande ρ si ha, come ovvio se la velocità è costante, $\dot\theta \sim 1/\rho$. A questo punto, sapendo che $\dot{\mathbf{x}} = v_0/r(\cos\theta, \sin\theta)$ è immediato calcolare $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{x}}$ ottenendo $\tau = F = mv_0\dot\theta = mv_0^2/r\theta(t)$. Il momento angolare $L_z = (\mathbf{r}\times\mathbf{p})_z = m(x\dot y - y\dot z) = mr^2\theta^2\dot\theta$ (contribuisce solo $\mathbf{x}_{\rm filo}$) *non* è costante ma ma cresce come $L_z = \sqrt{2m^2rtv_0^3}$ quando il filo si allontana dal perno. Infatti il momento della forza vale $\mathbf{M} = \mathbf{x}\times\mathbf{F} = \mathbf{x}_{\rm perno}\times\tau$ cioè $M_z = \sqrt{m^2rv_0^3/2t}$. Si può verificare che $\dot L_z = M_z$ e che sul perno agisce un momento torcente esattamente opposto.

Non conviene usare le coordinate polari: si avrebbe $\rho^2 = r^2 + \ell^2 = r^2(1 + \theta^2)$, che è piuttsto scomodo. Notare che il θ usato precedentemente non è il θ delle coordinate polare; la semplice velocità trovata precedentemente, in coordinate polari avrebbe due complicate componenti (v_ρ, v_θ) perchè v_θ non è ortogonale al filo.

Capitolo 11

Moto di due corpi

Esercizio 76: Distanza minima in una dimensione *



(compitino del 1/4/1998). Due palline di dimensioni trascurabili e massa uguale a $M = 0.47\,\mathrm{kg}$ sono collegate da una molla di costante elastica $k = 1.5\,\mathrm{N/\,m}$ e lunghezza a riposo $\ell_0 = 0.4\,\mathrm{m}$. Il sistema è inizialmente in quiete. Una terza pallina, di dimensioni trascurabili e massa uguale a $m = 0.3\,\mathrm{kg}$, viene sparata come mostrato dalla freccia in figura, con velocità pari a $v_0 = 2\,\mathrm{m/\,s}$, contro una delle altre due palline. Le due palline che si urtano rimangono incollate fra di loro. Si calcoli

1. Quanto è la velocità delle due palline incollate tra di loro, subito dopo l'urto?
2. Quanto è la velocità del loro centro di massa?
3. Quale è la minima lunghezza raggiunta dalla molla nel moto successivo?

✍**Soluzione**: È utile iniziare a trattare un problema a due corpi semplice come questo: qui tutto il moto avviene lungo una sola dimensione.

1. Dopo l'urto $v_2 = mv_0/(M+m) = 0.8\,\mathrm{m/\,s}$.
2. $v_{\mathrm{CM}} = (M+m)v_2/(2M+m)$, o anche $v_{\mathrm{CM}} = mv_0/(2M+m)$.
3. Il modo più diretto consiste nell'usare la conservazione dell'energia rispetto al sistema del CM. Sappiamo (se non lo sapessimo basterebbe fare due calcoletti in più) che l'energia 'attorno' al centro di massa vale

$$E_{\mathrm{CM}} = \frac{\mu}{2}v^2 + V(x), \qquad V(x) = \frac{k}{2}(x-\ell_0)^2$$

dove x e $v = \dot{x}$ sono le distanze e velocità relative fra le due masse M ed $M+m$ e $\mu = 0.29\,\mathrm{kg}$ è la massa ridotta. All'istante t_* nel quale si ha la minima distanza $x = x_*$ si ha $v = 0$. Quindi

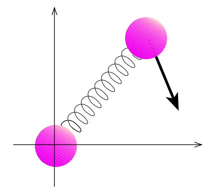
$$E(t_*) = \frac{k}{2}(x_* - \ell_0)^2 = E(0) = \frac{\mu}{2}v^2 \qquad : \qquad x_* = \ell_0 - \sqrt{\mu v^2}k = 0.0564\,\mathrm{m}$$

Esercizio 77: Distanza minima in due dimensioni *

Due particelle uguali di massa $m = 2\,\mathrm{kg}$ sono collegate da una molla di costante elastica $k = 1\,\mathrm{N/\,m}$ e lunghezza a riposo nulla. Questa è l'unica forza presente. All'istante inizale un particella si trova nel punto di coordinare $(0,0)$ con velocità nulla, l'altra nel punto $(2, 2.2)\,\mathrm{m}$ con velocità $(2.5, -3.6)\,\mathrm{m/\,s}$.

1. Calcolare la posizione del centro di massa all'istante $t = 4.6\,\mathrm{s}$;
2. Calcolare la minima distanza di avvicinamento tra le due masse;

3. Quale è il modulo della velocità angolare di rotazione delle masse attorno al loro centro di massa, nel punto di minima distanza trovato al punto precedente?



✍**Soluzione**:(compitino del 5/4/95). In coordinate polari l'equazione del moto sembra irrisolvibile. In coordinate cartesiane la soluzione è ovvia purchè la lunghezza a riposo della molla sia nulla. Le equazioni del moto non mescolano x ed y e la soluzione è $x_i(t) = x_{0i}\cos\omega t + v_{0i}/\omega \sin\omega t$. È facile verificare che E è costante; addirittura 'E_x' ed 'E_y' lo sono separatamente. È anche semplice verificare che L è costante del moto. È utile a questo punto ricordare la tecnica standard che consente di risolvere problemi di questo tipo. Consiste nello sfruttare il fatto che $E_{\rm CM}$ ed $L_{\rm CM}$, energia e momento angolare rispetto ('attorno') al CM sono costanti del moto. Essi differiscono da E ed L (energia e momento angolare rispetto al sistema iniziale) per quantità costanti (energia e momento angolare *del* CM). Sebbene non ci sia nessun problema a calcolare $E_{\rm CM}$ ed $L_{\rm CM}$ sapendo cosa sono, esistono formule semplici che consentono un calcolo più efficiente

$$E = \frac{1}{2}m_1\mathbf{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\mathbf{v}_2^2 + V(\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2}) = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\mathbf{V}_{\rm CM}^2 + E_{\rm CM}, \qquad E_{\rm CM} = \tfrac{\mu}{2}\mathbf{v}^2 + V(\mathbf{x})$$
$$\mathbf{L} = m_1\mathbf{x}_1\times\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{x}_2\times\mathbf{v}_2 = (m_1+m_2)\mathbf{X}_{\rm CM}\times\mathbf{V}_{\rm CM} + \mathbf{L}_{\rm CM} \qquad \mathbf{L}_{\rm CM} = \mu\mathbf{x}\times\mathbf{v}$$

Passando alle coordinate polari e riscrvendo l'energia cinetica 'di rotazione' $\mu v_\theta^2/2$ in termini del momento angolare nel sistema del CM $L_{\rm CM} = \mu\rho v_\theta = \mu\rho^2\dot\theta$ si ottiene la costante del moto che consente di rispondere alle domande

$$E_{\rm CM} = \frac{\mu}{2}\dot\rho^2 + V_{\rm eff}(\rho), \qquad V_{\rm eff}(\rho) = \frac{\mu}{2}v_\theta^2 + V(\rho) = \frac{L_{\rm CM}^2}{2\mu\rho^2} + \frac{k}{2}\rho^2$$

Quindi la soluzione del problema è:

1. La velocità del CM è costante $\mathbf{V}_{\rm CM} = \mathbf{v}_2(0)/2$; quindi $\mathbf{X}_{\rm CM}(t) = \mathbf{X}_{\rm CM}(0) + \mathbf{V}_{\rm CM}t$. All'istante richiesto vale $(6.75, -7.18)\,$m.

2. Una sola fra le risposte è minore della distanza iniziali, quindi è la risposta giusta. Alternativamente, usando il fatto che $E_{\rm CM}$ e $L_{\rm CM}$ sono costanti e che all'istante di massimo avvicinamento $\dot\rho = 0$

$$\rho^2_{\rm max,min} = \frac{E_{\rm CM}}{k}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{kL_{\rm CM}^2}{\mu E_{\rm CM}}}\right)$$

   Con i dati del problema $\mathbf{x} = (2.2, 2)\,$m e $\mathbf{v} = (2.5, 3.6)\,$m/s, quindi $\rho_0 = \sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}} = 2.973\,$m e $\dot\rho_0 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{x}/\sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}} = -0.982\,$m/s: quindi $L_{\rm CM} = L_{\rm CM}(0) = \mu(xv_y - yv_x) = -12.7\mu\ {\rm m^2/s}$ ed $E_{\rm CM} = E_{\rm CM}(0) = 14.025$ J. Quindi $\rho_{\rm min} = 2.8415\,$m e $\rho_{\rm max} = 4.47\,$m.

3. La velocità angolare è data da $\dot\theta = L_{\rm CM}/\mu\rho^2_{\rm min} = -1.573\,$rad/s (mentre in $\rho_{\rm max}$ vale $-0.635\,$rad/s).

Esercizio 78: Interazione fra 2 corpi *

(compitino del 10/4/1997). Una particella puntiforme di massa $m_1 = 9.6\,$kg si avvicina dall'infinito con velocità $v_1 = 3.2\,$m/s e parametro d'urto $b = 1.2\,$m, a una particella ferma nel laboratorio. Fra le particelle si esercita una forza attrattiva $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$ (con $k = 1\,$N/m) se la distanza relativa $r = |\mathbf{r}|$ è minore di $r_* = 4.9\,$m, mentre, per distanze maggiori, la forza è nulla.

1. Determinare la minima distanza di avvicinamento tra le particelle supponendo che la particella inizialmente ferma nel laboratorio abbia massa infinita.

Si supponga per le domande successive che le due particelle abbiano la stessa massa, con il valore dato precedentemente

2. Determinare la minima distanza di avvicinamento, assumendo che la particella incidente abbia lo stesso parametro d'impatto e la stessa velocità iniziale della domanda precedente.

In un altro evento di urto con lo stesso potenziale e con le medesime velocità iniziali, nel sistema del laboratorio si osserva che dopo l'urto la particella incidente viene emessa con un angolo $\theta_1 = 0.51$ rispetto alla direzione iniziale

3. Determinare il modulo della velocità finale della particella incidente.

4. Determinare l'angolo che forma la velocità finale della particella inizialmente a riposo rispetto alla direzione di volo iniziale della particella incidente.

✍**Soluzione**: Per prima cosa occorre trovare il potenziale corrispondente alla forza data, $F_r = -dV/dr$. Scegliendo la costante arbitraria in modo che $V(\infty) = 0$ il potenziale è

$$V(r) = \begin{cases} \frac{k}{2}(r^2 - r_*^2) & \text{per } r < r_* \\ 0 & \text{per } r > r_* \end{cases}$$

Notare che nella parte interna è *necessario* scegliere la costante arbitraria in modo che il potenziale sia continuo ad $r = r_*$ (altrimenti si avrebbe una forza infinita ad $r = r_*$!). I segni sono giusti: il potenziale ha una 'buca' ad $r < r_*$ in quanto la forza è attrattiva.

1. All'inizio l'energia vale $E = \frac{1}{2}mv_1^2$ ed il momento angolare rispetto alla particella ferma vale $L = bmv_1$. L'energia è costante del moto. Nel momento di minima distanza $\dot{r} = 0$ e quindi $E = V_{\text{eff}}(r_{\min})$. Risolvendo si trova $r_{\min} = 1.08\,\text{m}$. ($r_{\min} < b$ in quanto la forza è attrattiva. Una sola risposta ha $r_{\min} \neq 0$ e $< b$).

2. Si usa adesso la conservazione dell'energia rispetto al CM $E_{\text{CM}} = \frac{\mu}{2}v_1^2 = 24.5\,\text{J}$ e del momento angolare rispetto al CM $L_{\text{CM}} = \mu b v_1$ dove $\mu = m/2$ è la 'massa ridotta'. Imponendo $E_{\text{CM}} = V_{\text{eff}}(\rho_{\min})$ dove ora $V_{\text{eff}}(\rho) = L_{\text{CM}}^2/2\mu\rho^2 + V(\rho)$ si trova $\rho_{\min} = 0.99\,\text{m}$. Viene meno di prima in quanto la seconda particella può ora avvicinarsi alla prima.

Per le domande 3. e 4. non serve seguire in dettaglio il moto del sistema: come in ogni problema di urto è sufficiente imporre che energia ed impulso dopo l'interazione sono uguali ai loro valori prima dell'interazione, indipendentemente da come è fatto il potenziale. In linea di principio si può risolvere il sistemone

$$v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2, \qquad v_1 = v_1' c_1 + v_2' c_2, \qquad 0 = v_1' s_1 - v_2' s_2$$

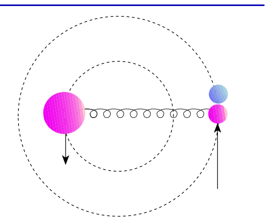
dove $s_i \equiv \sin\theta_i$. Nel nostro caso θ_1 e v_1 sono noti, mentre v_1', v_2' e θ_2 sono le incognite. Anche in questo caso semplice il calcolo diretto è piuttosto rognoso, ma fattibile. Risolvendo le due equazioni lineari (conservazione di $p_=$ e $p_\perp$) si trova $v_1' = v_1 s_2/D$ e $v_2' = -v_1 s_1/D$ (dove $D = c_1 s_2 + s_1 c_2$) che inserito nell'equazione quadratica (conservazione dell'energia) fornisce l'equazione $s_1^2 + s_2^2 = D^2$. Questa è risolvibile in θ_2 ponendo $s_2 = 2t/(1+t^2)$ e $c_2 = (1-t^2)/(1+t^2)$ ($t = \tan\theta_2/2$). L'equazione risultante $t(t^2 + 2\tan\theta_1 - 1) = 0$ ha soluzione $t^2 = 1 - 2\tan\theta_1$.

Tuttavia i calcoli sono più semplici usando il sistema del CM, nel quale sappiamo che $v_{i\text{CM}}' = v_{i\text{CM}}$.

3. Iniziamo a trovare l'angolo di deflessione θ_{CM} rispetto al CM, uguale per le due particelle (più precisamente $\theta_{1\text{CM}} = \theta_{\text{CM}} = -\theta_{2\text{CM}}$). La velocità della particella 1 rispetto al CM vale $\mathbf{v}_1' = \mathbf{v}_{1\text{CM}}' + \frac{1}{2}\mathbf{v}_1 = (v_1/2)(1 + c_{\text{CM}}, s_{\text{CM}})$. Quindi $\tan\theta_1 = s_{\text{CM}}/(1 + c_{\text{CM}})$ cioè $s_{\text{CM}} = 2\tan\theta_1/(1 + \tan^2\theta_1) = 2s_1c_1$. In conclusione $|\mathbf{v}_1'|^2 = (v_1/2)^2[(1 + c_{\text{CM}})^2 + s_{\text{CM}}^2] = (0.87v_1)^2$.

4. Per la particella 2 $\mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_{2\text{CM}}' + \frac{1}{2}\mathbf{v}_1 = (v_1/2)(1 - c_{\text{CM}}, -s_{\text{CM}})$. Quindi la sua direzione è $\tan\theta_2 = s_{\text{CM}}/(1 - c_{\text{CM}}) = 1.78$ cioè $\theta_2 = 1.06$.

Esercizio 79: Urto di palline legate da molla *



(compitino del 26/3/1999). Due corpi puntiformi, uno di massa doppia dell'altro, sono collegati da una molla di costante elastica $k = 3$ N/m, lunghezza a riposo nulla e massa trascurabile. Il corpo di massa minore ha una massa pari a $m_1 = 0.74$ kg. Si osserva che i due corpi descrivono due orbite circolari attorno ad un centro fisso, e la distanza tra di essi è $r_{12} = 1.2$ m.

1. Calcolare il modulo della velocità del corpo di massa minore.

Ad un certo istante il corpo di massa minore urta un terzo corpo, inizialmente a riposo, di pari massa. L'urto è tale per cui i due corpi rimangono attaccati. Calcolare, immediatamente dopo l'urto:

2. La velocità delle masse rimaste attaccate.

3. L'energia meccanica di tutto il sistema.

Calcolare inoltre

4. La lunghezza minima della molla successivamente all'urto.

✍**Soluzione**: Ovviamente le orbite sono due circonferenze concentriche; il corpo più leggero percorre a velocità maggiore la circonferenza più grande.

1. Imponendo $\mu v_{12}^2/r_{12} = F = kr_{12}$ si ottiene la velcoità relativa $v_{12} = r_{12}\sqrt{k/\mu}$. La massa ridotta vale $\mu = 2m/3$. Quindi $v_1 = \frac{2}{3}v_{12} = r_{12}\sqrt{2k/3m}$ e $v_2 = -\frac{1}{3}v_{12}$.
2. Per la conservazione dell'impulso, dopo l'urto $v_1' = v_1/2$ e $m_1' = 2m$.
3. $E = \frac{1}{2}(m_1' v_1'^2 + m_2 v_2^2 + kr_{12}^2) = \frac{5}{6}kr_{12}^2$. Si noti che il centro di massa rimane fermo anche dopo l'urto e che dopo l'urto la massa ridotta vale $\mu' = m$.
4. Imponendo $V_{\text{eff}}(r_{\min}) = E$, con $V_{\text{eff}}(r) \equiv L^2/(2\mu' r^2) + kr^2/2$ si ottiene $r_{\min}^2 = E/k(1 - \sqrt{1 - kL^2/\mu' E^2})$. Abbiamo già calcolato E; L vale $\mu' r_{12} v_{12}' = mr_{12}^2\sqrt{2k/3m}$. Inserendo i valori si ottiene $r_{\min} = r_{12}\sqrt{2/3}$. La soluzione è semplice in quanto il punto di partenza del moto è da $r_{\max}$, e non da un r qualunque.

Capitolo 12

Statica

Un corpo rigido può traslare ma anche ruotare: quindi c'e' una equazione del moto 'traslatoria' ed una 'rotatoria'.

Esercizio 80: Carriola

Quale forza verticale occorre esercitare su di un estremo di una lastra omogenea di massa M e lunghezza L per tenerla inclinata di un angolo θ rispetto all'orizzontale, se l'altro estremo è appoggiato su di un piano orizzontale privo di attrito? E se la lastra è appoggiata nel baricentro?

✍**Soluzione**: Le equazioni cardinali sono (polo nel punto di appoggio)

$$0 = M\ddot{z} = R + F - Mg, \qquad 0 = I\ddot{\theta} = L\cos\theta(F - Mg/2)$$

per cui la forza necessaria per sollevare la pietra è $F = Mg/2$, indipendentemente da θ. Si poteva ottenere la stessa risposta dal 'principio dei lavori virtuali': $F_z = +V'(z)$ con $V(z) = Mgz_{\rm G} = Mg\frac{z}{2}$.

Il risultato sembra contraddire l'esperienza comune: quando la lastra è 'quasi' verticale basta una piccola forza. Se è verticale $\cos\theta = 0$ e la forza è indeterminata; ma questo non risolve il problema. Il vero punto è che in presenza di una forza di attrito R_x nel punto di appoggio serve $F_x = -R_x$ e quindi $0 = I\ddot{\theta} = L\cos\theta(F_z - Mg/2) + L\sin\theta F_x$. Come capita spesso in problemi di corpo rigido, non si può trovare $\mathbf{F}$ senza conoscere quanto vale l'attrito (intuitivamente: dipende se la lastra è appoggiata sul fondo di una buchetta o su di una cima). Se $F_y = 0$ basta una piccola $F_x = Mg/2\tan\theta$ in accordo con l'intuito).

Se invece la pietra è appoggiata nel baricentro $V(z) = \text{cte}$ quindi $F = 0$. Le equazioni cardinali dicono la stessa cosa

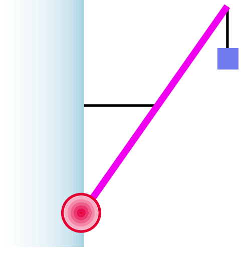
$$0 = M\ddot{z} = R + F - Mg, \qquad 0 = I\ddot{\theta} = \frac{L}{2}F$$

Questo spiega come costruire una carriola efficiente: mettere la ruota all'inizio è stupido; bisogna metterla a metà.

Esercizio 81: Sbarra inclinata

Quale è la tensione del filo che tiene ferma la sbarra di massa trascurabile libera di ruotare con appesa una massa m come in figura?

✍**Soluzione**: Possiamo ragionare in modi diversi



1. Partendo dai principi primi e considerando la sbarra come una sequenza di punti materiali

   $$m_3\ddot{\mathbf{x}}_3 = \mathbf{R}_3 - mg\mathbf{e}_z, \qquad m_2\ddot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{R}_2 - \tau\mathbf{e}_x, \qquad m_n\ddot{\mathbf{x}}_n = \mathbf{R}_n$$

   incluso il punto di incernieratura $n = 1$ nel quale c'e'anche la reazione del muro esterno. Le reazioni non compiono lavoro: $\sum \mathbf{R}_i \cdot \mathbf{v}_i = 0$. Usando $\mathbf{v} = r_i\dot{\theta}(\cos\theta, -\sin\theta)$ ottengo $\tau r_1\cos\theta - mg\sin\theta = 0$.

Per la statica le $\mathbf{x}_i$ sulle quali non agiscono forze esterne sono irrilevanti. Il **principio dei lavori virtuali** è esattamente questo in quanto $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$.

2. Usando invece le 'equazioni cardinali', validi per un corpo rigido e mettendo l'origine nel centro di rotazione

$$0 = m_{\text{asta}}\ddot{x}_{\text{CM}} = -\tau\mathbf{e}_x - mg\mathbf{e}_z + \mathbf{R}, \qquad 0 = \dot{L}_z = \tau r_{12}\cos\theta - mgr_{13}\sin\theta$$

La prima equazione è inutile, ma la seconda fornisce la soluzione. Se avessimo messo il polo in qualche altro punto, ad esempio sulla cima dell'asta la seconda equazione sarebbe invece stata $0 = \dot{\mathbf{L}} = \mathbf{x}_{31}\times\mathbf{R}+\mathbf{x}_{32}\times\tau$. Sostituendo $\mathbf{R} = -\tau - \mathbf{g}$ si ritrova la stessa condizione $0 = (\mathbf{x}_{32} - \mathbf{x}_{13}) \times \tau - \mathbf{x}_{13} \times \mathbf{g}$.

3. Usando la conservazione dell'energia, *scritta in funzione della lunghezza ℓ del filo*: $V(\ell) = mgr_3\cos\theta(\ell) = mg\ell r_{13}/r_{12}$, da cui $F = \tau = -dV/d\ell = -mgr_{13}/r_{12}$.

Esercizio 82: Ribaltamento di cubo incernierato *

(compitino del 5/4/95). Una lamina quadrata di lato $b = 1.2\,\text{m}$ e massa $m = 2.5\,\text{kg}$ e spessore trascurabile è incernierata sullo spigolo O ed appoggiata sul cuneo A come in figura; la cerniera permette alla lamina di ruotare senza attriti attorno all'asse passante per O e perpendicolare alla lamina; e la distanza tra O ed A è $a = 0.98\,\text{m}$. La lamina è in un piano verticale.

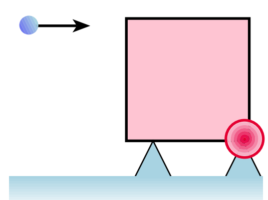
1. All'equilibrio, calcolare le componenti verticali della forza R_O esercitata dalla cerniera e dalla forza R_A esercitata dal cuneo.

Una pallina di massa $m/2$ e dimensioni trascurabili incide con velocità orizzontale $v = 2.6\,\text{m/s}$ sull'angolo della lamina opposto ad O e vi rimane attaccata.

2. Calcolare la velocità angolare del sistema subito dopo l'urto;

3. Calcolare la velocità minima che deve avere la pallina per rovesciare la lamina.

✍**Soluzione**: Il momento angolare di una lamina quadrata rispetto al centro vale $I_{\text{CM}} = mb^2/6$.



1. Le equazioni cardinali, scegliendo O come polo, sono

$$0 = m\ddot{z} = -mg + R_O + R_A, \qquad 0 = I\ddot{\theta} = -mg\frac{b}{2} + R_A a$$

per cui $R_A = mg\,b/2a = 15.3\,\text{N}$ ed $R_O = mg - R_A = 9.7\,\text{N}$

2. L'urto non è elastico e quindi non si conserva l'energia. La reazione vincolare della cerniera in O esercita una forza impulsiva per cui non si conserva l'impulso orizzontale. Tale reazione vincolare ha però momento nullo rispetto a O, per cui si conserva il momento angolare rispetto al polo O. Prima dell'urto $L_O = \frac{m}{2}vb$. Dopo l'urto $L_O = I\dot{\theta}$ dove

$$I = I_{\text{lamina}} + I_{\text{pallina}} = [I_{\text{CM}} + m(b/\sqrt{2})^2] + \frac{m}{2}(\sqrt{2}b)^2 = \frac{5}{3}mb^2$$

Quindi $\dot{\theta} = mvb/2I = 3v/10b = 0.65$.

3. Occorre che l'energia cinetica iniziale $E = \frac{I}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{3}{40}mv^2$ sia maggiore della differenza di potenziale ΔV necessaria per ruotare il cubo di 45°:

$$\Delta V = mg\frac{b}{2}(\sqrt{2}-1) + \frac{mg}{2}b(\sqrt{2}-1) = mgb(\sqrt{2}-1)$$

Quindi $v^2 \geq \frac{40}{3}bg(\sqrt{2}-1) = (8.14\,\text{m/s})^2$.

Capitolo 13

Corpo rigido

Un corpo rigido può traslare ma anche ruotare: quindi c'e' una equazione del moto 'traslatoria' ed una 'rotatoria' che si possono scrivere, in un sistema di riferimento inerziale, come

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}^{\text{ext}}, \qquad \dot{\mathbf{L}}_O = \mathbf{M}_O^{\text{ext}}$$

dove $\mathbf{P}$ è l'impulso totale, $\mathbf{F}^{\text{ext}}$ è la somma delle forze esterne, $\mathbf{M}_O^{\text{ext}}$ è la somma dei momenti delle forze esterne ed O è un qualunque polo *fisso*. In alcuni casi è utile considerare un polo O' mobile. In tal caso

$$\mathbf{L}_{O'} = \mathbf{L}_O + \mathbf{OO'} \times \mathbf{P}, \qquad \mathbf{M}_{O'}^{\text{ext}} = \mathbf{M}_O^{\text{ext}} + \mathbf{OO'} \times \mathbf{F}^{\text{ext}}$$

per cui la seconda equazione diventa $\dot{\mathbf{L}}_{O'} = \mathbf{M}_{O'}^{\text{ext}} + \mathbf{v}_{O'} \times \mathbf{P}$. Spesso è utile scrivere la seconda equazione rispetto al sistema di riferimento del CM, che in generale è un sistema non inerziale (ad es. per studiare il rotolamento di una ruota non omogenea). Nel caso $O' = \text{CM}$ $\mathbf{v}_{O'}$ è parallelo a $\mathbf{P}$: la seconda equazione diventa $\dot{\mathbf{L}}_{\text{CM}} = \mathbf{M}_{\text{CM}}^{\text{ext}}$.

Esercizio 83: Tensore d'inerzia di un parallelepipedo

Calcolare il momento d'inerzia rispetto ad un asse che congiunge due spigoli opposti di un parallelepipedo di lati a, a, h con 8 masse m sugli spigoli.

✍**Soluzione**: In generale, il tensore d'inerzia $I_{ij} \equiv \int (\delta_{ij} r^2 - x_i x_j) dm$ dove $r^2 = x_i x_i = x^2 + y^2 + z^2$ è una utile costruzione matematica in quanto consente di scrivere il momento di inerzia rispetto ad un qualunque asse n come $I_n = I_{ij} n_i n_j$. La dimostrazione è ovvia se si usa il fatto che I_n è un *tensore* di rango due, e che quindi I_n è uno scalare. Apparentemente sembra difficile calcolare $I_n \equiv \int d_\perp^2 dm$ rispetto an un asse sbilenco. Se però mettiamo l'asse z lungo n allora $d_\perp^2 = x^2 + y^2$. In tal caso $n_i = (0, 0, 1)$ e $I_n = I_{z'z'} = \int (r^2 - z^2) dm = \int (x^2 + y^2) dm$ è davvero quello che si vuole.

Ad esempio per un parallelepipedo di lati a, a, h con 8 masse m sugli 8 spigoli $\mathbf{x}_n = (\pm a, \pm a, \pm h)/2$ rispetto ad assi x, y, z paralleli ai lati $I_{ij} = 2m \,\text{diag}(a^2 + h^2, a^2 + h^2, a^2 + a^2)$. Il momento d'inerzia rispetto ad un asse $\mathbf{n} = (a, a, h)/\sqrt{2a^2 + h^2}$ che congiunge due spigoli opposti vale $I_n = 4a^2(a^2 + 2h^2)/(h^2 + 2a^2)$. Per un cubo $(h = a)$ diventa $I_n = 4a^2$: infatti si hanno 6 vertici che distano $d_\perp^2 = a^2 \sin^2\theta = a^2(1 - \cos^2\theta) = a^2(1 - 1/3) = 2a^2/3$ dall'asse.

Esercizio 84: Tensore d'inerzia di una sfera

Calcolare il momento d'inerzia di una sfera omogenea di raggio r e massa m

✍**Soluzione**: Iniziamo ad esercitarci con un cilindro: $I = \int r^2 dm = m \cdot (\int_0^r r^3 dr)/(\int_0^r r\ dr) = \frac{1}{2} m r^2$.

Calcolare $I = \int (x^2 + y^2) dm$ non è simpatico. Usiamo un trucco: il tensore di inerzia dovrà essere $I_{ij} = I \,\text{diag}(1, 1, 1)$ in quanto una sfera rimane uguale con qualunque orientazione degli assi. Possiamo quindi limitarci a calcolare $3I = \text{Tr}\, I_{ij} = 2 \int r^2 dm = \frac{6}{5} m r^2$. Quindi $I = \frac{2}{5} m r^2$.

Esercizio 85: Altalena

Come si fa ad aumentare l'ampiezza di oscillazione andando in altalena?

✍**Soluzione**: Quando si passa per la posizione orizzontale, spostando le gambe, si modifica il momento di inerzia, rispetto al centro di rotazione, da $I_{\max}$ (gambe allungate) a $I_{\min}$ (gambe piegate). Siccome il momento angolare è costante la velocità angolare aumenta, $\omega I_{\max} = \omega' I_{\min}$, e l'energia cinetica $K = \frac{I}{2}\omega^2$ aumenta di un fattore $I_{\max}/I_{\min}$. Se $I_{\min} = (M + m_{\rm g})L^2$ e $I_{\max} = M\ell^2 + m(L+\ell)^2$ (dove m = massa della gamba $\ll M$ = massa totale, e ℓ = lunghezza della gamba $\ll L$ = lunghezza dell'altalena). Prendendo $\ell/L = 0.1$ e $m/M = 5\%$ si ha $I_{\max}/I_{\min} \simeq 1 + 2(m/M)(\ell/L) \approx 1.01$. L'energia cinetica non si conserva in quanto uno compie lavoro nello spostare le gambe. Questo movimento consente aumentare l'altezza massima di oscillazione (calcolabile tramite $V = mgh = K$) di un ugual fattore. Nei due estremi di oscillazione, quando $\omega = 0$ si riporta il momento angolare da $I_{\min}$ a $I_{\max}$ senza variare nè L ne E (il baricentro non si sposta). Quindi, dopo n oscillazioni l'altezza massima raggiunta aumenta di un fattore $(I_{\max}/I_{\min})^{2n}$, avendo supposto gli attriti trascurabili.

Esercizio 86: Rotolamento da piano inclinato

Si calcoli la velocità di caduta lungo un piano inclinato (a) di un piattello (b) di un cilindro (c) di una sfera (d) di una sfera dentro una guida a 90 gradi. Chi è il più veloce?

✍**Soluzione**: Le equazioni del moto di una rotella che scende sono

$$m\ddot{x} = mg\sin\theta - F_A, \qquad I\ddot{\theta} = +rF_A$$

avendo messo l'asse x lungo il piano inclinato. La potenza sviluppata dalla forza d'attrito vale

$$\dot{E} = \mathbf{F}_A \cdot \mathbf{v} + \mathbf{M}_{F_A} \cdot \omega = F_A w \qquad \text{dove} \qquad w \equiv \dot{\omega} r - v$$

è la velocità del punto di contatto fra la ruota ed il terreno. Quindi *se il cilindro rotola senza strisciare, cioè se $v = \dot{\theta} r$, la forza d'attrito non compie lavoro e l'energia è costante.* Se il punto di contatto è fermo la forza d'attrito non compie lavoro. Per questo motivo la ruota è stata un'invenzione utile. Supponendo $w = 0$ si trova $(m + I/r^2)\ddot{x} = mg\sin\theta$ e $F_A = \mu g \sin\theta$ dove $1/\mu = 1/m + 1/(I/r^2)$. Se $F_A < \mu_S R = \mu_S mg\cos\theta$ l'attrito produce una forza sufficiente a dare rotolamento senza strisciamento; altrimenti il moto è più complicato.

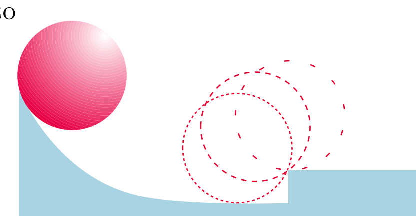
Abbiamo quindi visto che l'energia $E = \frac{1}{2}(mv^2 + I\omega^2) + mgz$ è una costante del moto. Sapendo questo l'esercizio è facile. Per il cilindro $I = \frac{1}{2}mr^2$; per la sfera $I = \frac{2}{5}mr^2$. Per cilindro e sfera $\omega = v/r$; per la sfera nella guida $\omega = \sqrt{2}v/r$: quindi è la più lenta. Riassumendo l'energia cinetica è $12cmv^2$ con $c = 1$ per il piattello; $c = 3/2$ per il cilindro; $c = 7/5$ per la sfera e $c = 9/5$ per la sfera nella guida.

Esercizio 87: Cilindro che sale su di un gradino

Da quale altezza occorre lasciar cadere un cilindro di massa m e raggio r, affinchè salga sul gradino, come in figura? Si assuma che durante l'arrampicata il punto di contatto cilindro-gradino rimanga fermo.

✍**Soluzione**: Chiamiamo $I_{\rm CM} = cmr^2$ il momento d'inerzia del cilindro rispetto al suo centro di massa: $c = 0$ se la massa è tutta nel centro; $c = 2/5$ per una sfera omogenea; $c = 1/2$ per un cilindro omogeneo; $c = 1$ se la massa è tutta nel guscio esterno (cioè se il cilindro è un tubo vuoto). Se il cilindro rotola senza strisciare arriva in fondo con energia $K = \frac{1}{2}(1+c)mv_0^2 = mgz$.

Nell'urto cilindro/gradino si conserva il momento angolare rispetto alla punta del gradino P: $L_P = L'_P$ dove



$$\begin{aligned} L_P &= L_P^{\rm CM} + L_{\rm CM} = m(r-h)v_0 + I_{\rm CM}\omega_0 = mv_0[(1+c)r - h] \\ L'_P &= I_P\omega' = (1+c)mr^2\omega' \end{aligned}$$

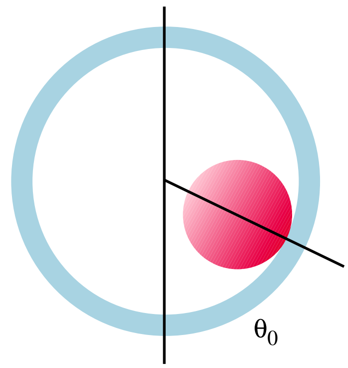
$(I_P = I_{\rm CM} + mr^2 = (1+c)mr^2)$. L'energia dopo l'urto vale

$$K' = \frac{I_P}{2}\omega'^2 = \rho \cdot K = \left(1 - \frac{h/r}{1+c}\right)^2 K < K$$

L'energia dissipata è minima se c è massimo. Durante l'arrampicata si conserva l'energia: siccome si assume che il punto di contatto cilindro/gradino sia fermo le forze d'attrito non compiono lavoro. Il cilindro arriva in cima se $K' > \Delta V = mgh$. La risposta finale è che occorre far partire il cilindo da un'altezza $z > h/\rho(h)$. Se $h \ll r$ allora $K' \approx K$ e $z \approx h$. Per $h = r/2$ e $c = 1/2$ si ha $z > 9h/4$ Per $h = r$ e $c = 1/2$ si ha $z > 9h$.

Esercizio 88: Cilindro che ruota in un cilindro

(compitino del 27/5/98). Un cilindro di massa $m = 1.2\,\mathrm{kg}$ e raggio $r = 0.33\,\mathrm{m}$ è appoggiato sulla superficie interna di un tubo cilindrico di raggio interno $1.1\,\mathrm{m}$. Il tubo è mantenuto in quiete in posizione orizzontale. Durante il moto l'asse di simmetria del cilindro rimane sempre parallelo all'asse del tubo. Il coefficiente di attrito statico è tale per cui, nelle condizioni di moto assegnate, si ha sempre puro rotolamento. Inizialmente il cilindro è mantenuto, mediante una opportuna forza F orizzontale applicata al suo asse di simmetria, nella posizione in cui la retta che attraversa perpendicolarmente gli assi dei due corpi forma un angolo $\theta_0 = 0.4\,\mathrm{rad}$ con la verticale. In queste condizioni di equilibrio calcolare



1. L'intensità della forza applicata all'asse del cilindro;
2. Le componenti x ed z della forza di contatto che il tubo esercita sul cilindro.

Successivamente la forza esterna viene rimossa ed il cilindro è lasciato libero di muoversi. In queste condizioni calcolare:

3. La velocità del centro di massa del cilindro quando questo passa attraverso la posizione di equilibrio stabile;
4. La pulsazione delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio.

✍**Soluzione**:

1. si ha $m\ddot{\mathbf{x}}_{\rm CM} = \mathbf{F}+\mathbf{R}+\mathbf{P} = 0$ dove $\mathbf{F}$ è la forza esterna orizzontale e $\mathbf{P} = (0, -mg)$ è la forza peso verticale, mentre $\mathbf{R}$ è la reazione vincolare inclinata di un angolo θ_0. Quindi $F = mg\tan\theta_0 = 5.07\,\mathrm{N}$.
2. $R_x = -F$ e $R_z = mg = 12\,\mathrm{N}$.
3. Si conserva l'energia
$$E = \frac{m}{2}v_{\rm CM}^2 + \frac{I}{2}\dot{\alpha}^2 + mgz$$
dove $\alpha(t)$ è l'angolo di rotazione del cilindro attorno al suo CM. Se usiamo come variabile cinematica l'angolo θ definito come in figura si ha $v_{\rm CM} = (R-r)\dot{\theta}$, $\dot{\alpha} = v_{\rm CM}/r$ e $z = mg(R-r)\cos\theta$. Quindi $v_{\rm CM}^2(0) = \frac{4}{3}g(R-r)(1-\cos\theta_0) = (0.9\,\mathrm{m/s})^2$. Il punto sottile è analogo alla distinzione fra giorno solare e giorno sidereo per la Terra che ruota attorno al sole ed attorno a se stessa.

   Può essere non ovvio che la relazione $\dot{\alpha} = v_{\rm CM}/r$ sia uguale a quella di un cilindro che rotola su di un piano. Un modo di vederla è scrivere $\alpha = \ell/r - \theta$ dove $\ell = R\theta$ è il cammino fatto ed il $-\theta$ è dovuto al fatto che mano a mano che il camminare sulla superficie curva del cilindro induce una rotazione.

   Un altro modo è calcolare la velocità del punto di contatto $w_{\rm contatto} = v_{\rm CM} - r\dot{\alpha} = (R-r)\dot{\theta} - r\dot{\alpha}$ ed imporre che sia uguale a zero.
4. L'energia, espressa in funzione di $\theta(t)$, è
$$E = \frac{m}{2}(R-r)^2(1+\frac{1}{2})\dot{\theta}^2 + mg(R-r)\cos\theta$$
Quindi l'equazione del moto è $\ddot{\theta} = -\omega_{\rm osc}^2\sin\theta$ dove $\omega_{\rm osc} = [2g/3(R-r)]$ è la pulsazione delle piccole oscillazioni.

Esercizio 89: Jo-jo

Si studi il moto di un cilindro di massa m e raggio r lasciato cadere avvolto ad un filo con un capo bloccato.

✍**Soluzione**: Il cilindro cade rotolando con velocità angolare $\dot{\theta} = \dot{z}/r$. Risolviamo il problema in due modi.

1. Senza usare la conservazione dell'energia: le equazioni 'cardinali' sono

$$m\ddot{z} = \tau - g, \qquad I\ddot{\theta} = -r\tau$$

dove è importante non sbagliare il segno. Quindi

$$(m + \frac{I}{mr^2})\ddot{z} = \frac{3}{2}\ddot{z} = -g$$

in quanto per un cilindro omogeneo $I = \frac{1}{2}mr^2$.

2. Usando la conservazione dell'energia:

$$E = \frac{m}{2}v^2 + \frac{I}{2}\omega^2 + mgz = \frac{3}{4}m\dot{z}^2 + mgz$$

avendo inserito il vincolo $v = \omega r$. Quindi è un moto uniformemente accelerato con accelerazione $\ddot{z} = -\frac{2}{3}g$. La tensione del filo vale $\tau = m(g + \ddot{z}) = m/3$. (se non ruotasse $a = g$ e $\tau = 0$; siccome ruota il filo deve esercitare una forza per accelerare la rotazione.)

Quando il filo finisce di srotolarsi il punto di attacco salta dalla parte opposta. A questo punto può solo risalire. Se il filo è elastico lo jo-jo rimbalza elasticamente: $\dot{z} \to -\dot{z}$. Dopo il rimbalzo le equazioni del moto sono le stesse, eccetto un segno che varia nell'equazione 'di rotolamento' che diventa $I\ddot{\theta} = +r\tau$. Un altro segno cambia nel vincolo cinematico, che diventa $\dot{\theta} = -\dot{z}/r$. Conseguentemente il filo ri-inizia ad arrotolarsi. Siccome l'energia si conserva ed è la stessa di prima lo jo-jo risale fino alla cima.

Esercizio 90: Scala che scivola

Si scriva l'equazione di moto per una scala appoggiata su un muro verticale, trascurando gli attriti.

✍**Soluzione**: Partendo dai principi primi (senza mai usare il momento angolare) e dividendo la sbarra in $N = L/d\ell$ pioli di massa $m = M/N$

$$m\ddot{\mathbf{x}}_\ell = -mg\mathbf{e}_z + \mathbf{F}_{\text{in}\ell} + \delta_{\ell 0}R_x\mathbf{e}_x + \delta_{\ell L}R_y\mathbf{e}_y$$

con

$$\mathbf{x}_\ell = \begin{pmatrix} (\ell - L)\cos\theta \\ \ell\sin\theta \end{pmatrix}, \qquad \dot{\mathbf{x}}_\ell = \dot{\theta}\begin{pmatrix} (L-\ell)\sin\theta \\ \ell\cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \ddot{\mathbf{x}}_\ell = \ddot{\theta}\frac{\dot{\mathbf{x}}_\ell}{\dot{\theta}} - \dot{\theta}^2\mathbf{x}_\ell$$

Per eliminare le reazioni vincolari 'esterne' ed 'interne' proietto le equazioni del moto lungo $\dot{\mathbf{x}}_\ell$ e le sommo: esse scompaiono perchè non producono energia

$$\sum \ddot{\mathbf{x}}_\ell \cdot \dot{\mathbf{x}}_\ell = \dot{\theta}\ddot{\theta}\sum_\ell m_\ell[(L-\ell)^2\sin^2\theta + \ell^2\cos^2\theta] + \dot{\theta}^3\sum_\ell[(L-\ell)^2 - \ell^2]\sin\theta\cos\theta = -\dot{\theta}\cos\theta\sum \ell$$

cioè $\frac{L^2}{3}\ddot{\theta} + 0\dot{\theta}^2 = -g\frac{L}{2}\cos\theta$.

L'energia è

$$E = \sum_{\ell=0}^{N=L/d\ell}(\frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}_\ell^2 + mg\ell\sin\theta) = \frac{M}{2}\frac{L^2}{3}\dot{\theta}^2[\sin^2\theta + \cos^2\theta] + Mg\frac{L}{2}\sin\theta$$

Siccome $1/3 = 1/4 + 1/12$ il teorema di Koenig $K = K_{\text{trasl}} + K_{\text{rot}}$ fornisce la stessa risposta

$$K_{\text{trasl}} = \frac{M}{2}\dot{\mathbf{x}}_G^2 = \frac{M}{2}\frac{L^2}{4}[\sin^2\theta + \cos^2\theta]\dot{\theta}^2, \qquad K_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\frac{ML^2}{12}\dot{\theta}^2$$

Da $\dot{E} = 0$ seguono nuovamente le equazioni del moto. L'energia cinetica è 'piatta' nella variabile θ: quindi i $\dot{\theta}^2$ scompaiono dalle equazioni del moto. Basta che il muro non sia perfettamente verticale, o che ci sia una persona sulla scala, perchè questa fortunata coincidenza accidentale scompaia.

Usando invece il momento angolare le equazioni 'cardinali' sono

$$M\ddot{x}_G = R_x, \qquad M\ddot{y}_G = R_y - Mg, \qquad I\ddot{\theta} = \dot{L}_G = M_G = -\frac{L}{2}(R_x \sin\theta + R_y \cos\theta)$$

[per i segni: $\dot{L}_z = \Delta x R_y - \Delta y R_x$, $\Delta y > 0$ ma $\Delta x < 0$; il segno relativo è facile: se $R_x, R_y > 0$ coopererebbero a far girare in un senso]. Eliminando i vincoli ed inserendo il vincolo

$$\begin{pmatrix} x_G \\ y_G \end{pmatrix} = \frac{L}{2}\begin{pmatrix} -\cos\theta \\ +\sin\theta \end{pmatrix} \qquad : \qquad \begin{pmatrix} \ddot{x}_G \\ \ddot{y}_G \end{pmatrix} = \frac{L}{2}\left\{\ddot{\theta}\begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} + \dot{\theta}^2\begin{pmatrix} +\cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix}\right\}$$

(cioè il baricentro si muove lungo un arco di circonferenza) si ottiene

$$I\ddot{\theta} = -\frac{L}{2}M(\ddot{x}_G \sin\theta + (\ddot{y}_G + g)\cos\theta) = -\frac{ML^2}{4}\ddot{\theta} + (cs - cs)\dot{\theta}^2 - \frac{MLg}{2}\cos\theta$$

che è di nuovo l'equazione del pendolo.

Esercizio 91: Ruota dentata

Con quale accelerazione (ed in quale direzione) si muove una ruota dentata soggetta at una forza esterna F applicata in un punto sopra il centro a distanza ρ da esso?

✍**Soluzione**: Chiamando R la reazione orizzontale del piano orizzontale al quale la ruota è incernierata le equazioni del moto sono:

$$m\ddot{x} = F - R, \qquad I\ddot{\theta} = rR + \rho F$$

ed il vincolo $\ddot{x} = r\ddot{\theta}$. I segni sono importanti: se va a destra $\dot{\theta} > 0$. Per vedere che sono giusti basta notare che (a) con questi segni F fa ruotare nel senso giusto; (b) il segno relativo fra rR e ρF è giusto. Risolvendo il sistema si ottiene

$$\ddot{x} = \frac{r(r+\rho)F}{I + mr^2}, \qquad R = F\frac{I - m\rho r}{I + mr^2}$$

Notiamo che (1) l'accelerazione è sempre nella direzione della forza (2) la reazione vincolare è zero se $\rho = I/(mr) = r/2$ per un disco omogeneo (3) per $r = \rho$ si ha la massima accelerazione, e la forza di vincolo è nella stessa direzione di F.

Esercizio 92: Urto palla da biliardo

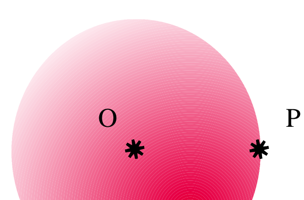
Trovare l'altezza h della stecca su cui far rimbalzare una palla da biliardo in modo che un puro rotolamento resti tale anche dopo il rimbalzo, assumendo che la forza impulsiva sia orizzontale.

✍**Soluzione**: Supponiamo che prima dell'urto si muova da destra a sinistra con velocità v e che la velocità dopo l'urto sia v'. Allora durante l'urto il cuscinetto gli dà un impulso $\Delta p = m(v + v')$. Supponendo la forza impulsiva orizzontale il momento angolare varia di $\Delta L = (h - r)\Delta p$. Siccome il moto è sempre di rotolamento puro ($\omega = v/r$) si ha anche $\Delta L = I\Delta\omega = \Delta p I/mr$ e quindi $h - r = I/mr$. Per una sfera uniforme di raggio r $I = 2r^2/5$ quindi $h = 7r/5$.

Questo esercizio mostra come la dinamica dell'urto sia in generale (ed in molti casi interessanti) non risolubile senza conoscere i dettagli delle forze impulsive. Qui abbiamo assunto che siano orizzontali.

Esercizio 93: Cilindro non omogeneo

[compitino del 26/4/96] Un disco disomogeneo di massa $m = 5.3\,\text{kg}$ e raggio $r = 1.6\,\text{m}$ ha il centro di massa (C) a distanza $r_C = 0.76\,\text{m}$ dall'asse passante per il suo centro geometrico. Il momento d'inerzia del



disco rispetto all'asse passante per il centro di massa vale $I_C = 2.3\,\mathrm{kg\,m^2}$. Il disco poggia su un piano orizzontale *privo di attrito*. All'istante $t = 0$ l'angolo che il vettore congiungente O al punto di contatto forma con il vettore OC è $\theta_0 = 0.91$ (vedi figura).

1. Calcolare le componenti F_x ed F_z della forza da applicare al punto P posto sul bordo del disco alla stessa altezza del centro geometrico, per mantenere il disco in questa posizione.

Rimossa la forza applicata in P il disco è lasciato libero di muoversi. Quando il vettore OC si trova a formare un angolo $\theta_1 = 0.28$ con la verticale, calcolare

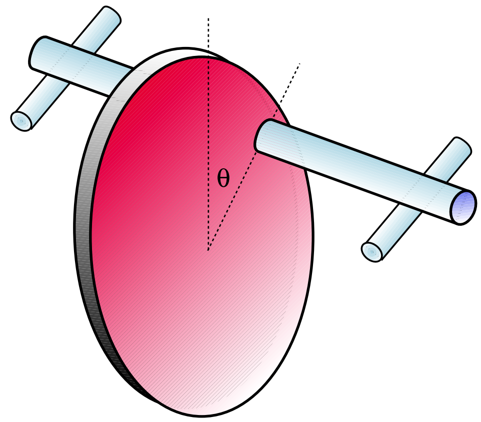
2. Il modulo del rapporto tra la velocità di traslazione del centro di massa del disco e la velocità angolare di rotazione attorno al suo centro di massa;
3. Il modulo della velocità di traslazione del centro di massa del disco;
4. Il disco viene poi posato nella sua posizione di equlibrio stabile. Calcolare la pulsazione delle piccole oscillazioni attorno a questa posizione di equilibrio.

✍**Soluzione**: Trascurare l'attrito produce un moto poco realistico, ma matematicamente semplice: il CM si muove solo in verticale.

1. Ovviamente $F_x = 0$ perchè non esiste nessuna forza orizzontale. Per trovare F_z conviene considerare il momento delle forze rispetto ad O: la reazione vincolare ha braccio zero. Quindi $M_O = rF_z - mgr_C \sin\theta_0 = 0$ per $F_z = mg(r_C/r)\sin\theta_0 = 20\,\mathrm{N}$.
2. Dovrà essere $\mathbf{v}_{Cx} = 0$ in quanto non esistono forze esterne. Per calcolare $\mathbf{v}_{Cz}$, possiamo dire che $\mathbf{v}_C$ è la composizione della velocità di traslazione del cilindro $\mathbf{v}_O$, più la velocità dovuta alla rotazione attorno ad O: $\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_O + \omega \times \mathbf{r}_C$. Siccome $\mathbf{v}_O$ è orizzontale si ha $v_{Cz} = (\omega \times \mathbf{r}_C)_z = r_C\dot\theta_C \sin\theta_C$. Quindi $\mathbf{v}_C/\dot\theta_C = (0, r_C \sin\theta_C) = (0, 0.21)$ a $\theta = \theta_1$.
3. Si conserva l'energia. La cosa difficile è scriverla. Per il teorema di Koenig
$$E = K_{\mathrm{trasl}} + K_{\mathrm{rot}} + V = \frac{m}{2}(v_{Cx}^2 + v_{Cz}^2) + \frac{I_C}{2}\dot\theta_C^2 + mgz_C = \frac{1}{2}(mr_C^2 \sin^2\theta + I_C)\dot\theta^2 - mgr_C\cos\theta$$
Usando $E(\theta_1) = E(\theta_0)$ si trova $\dot\theta_1 = 3.32/\mathrm{s}$ e quindi $v_C(\theta_1) = 0.7\,\mathrm{m/s}$.
4. L'equazione del moto derivante dalla conservazione ($\dot E = 0$) di $E = \frac{1}{2}Z(\theta)\dot\theta^2 + V(\theta)$ è $Z\ddot\theta + \frac{1}{2}Z'\dot\theta^2 + V'(\theta) = 0$, che linearizzata attorno al punto di equlibrio stabile $\bar\theta = 0$ è $\ddot\theta = -\omega^2\theta$ con $\omega^2 = V''(0)/Z(0) = mgr_C/I_C$. Quindi $\omega = 4.2/\mathrm{s}$.

Se ci fosse stata una forza d'attrito sufficientemente forte da dare un moto di rotolamento senza strisciamento, l'unica variazione ai punti 3. e 4. sarebbe stata che $v_{Cx} = v_O - \dot\theta r_C\cos\theta = (r - r_C\cos\theta)\dot\theta \neq 0$. Quindi il moto sarebbe stato più complicato e più lento.

Esercizio 94: Disco su perno



[compitino del 10/4/97] Un disco omogeneo di massa $m = 2.7\,\mathrm{kg}$ e raggio $r = 1.7\,\mathrm{m}$ è attraversato perpendicolarmente da un perno di massa trascurabile, posto a $d = 0.83\,\mathrm{m}$ dall'asse passante per il suo centro geometrico (vedi figura). Il perno poggia su due guide orizzontali parallele, e può muoversi senza che si eserciti alcuna forza di attrito. A $t = 0$ il disco è fermo e l'angolo che il vettore congiungente il perno al centro geometrico forma con la verticale $\mathbf{g}$ vale $\theta_0 = 0.83$.

1. Determinare il modulo delle componenti della forza di contatto tra guide ed asse all'istante iniziale.
2. Determinare il modulo della velocità del centro di massa del disco quando l'angolo θ vale $\theta_1 = 0.25$.
3. Determinare la frequenza angolare delle piccole oscillazioni del sistema attorno al punto di equilibrio stabile.

✍**Soluzione**: L'energia E è costante e per rispondere a tutte le domande conviene prima scrivere calcolarla. Usando il teorema di Koenig ed il fatto che $\dot{x}_C = 0$ e che $z_C = -d\cos\theta + \mathrm{cte}$

$$E = K_{\mathrm{trasl}} + K_{\mathrm{rot}} + V = \frac{m}{2}(\dot{x}_C^2 + \dot{z}_C^2) + \frac{I_C}{2}\dot{\theta}_C^2 + mgz_C = \frac{m}{2}(\frac{r^2}{2} + d^2\sin^2\theta)\dot{\theta}^2 - mgd\cos\theta$$

Le equazioni del moto che risultano da $\dot{E} = 0$ sono

$$(\frac{r^2}{2} + d\sin^2\theta)\ddot{\theta} + d^2\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta = -gd\sin\theta$$

Le equazioni del moto si sarebbero potute ottenere anche dalle equazioni cardinali:

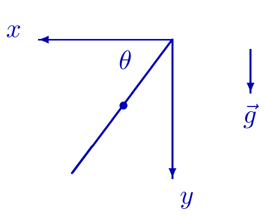
$$I_C\ddot{\theta} = -R_z d\sin\theta, \qquad m\ddot{z}_C = R_z - mg \qquad : \qquad I_C\ddot{\theta} + md\sin\theta\ddot{z}_C = -mgd\sin\theta$$

(il momento delle forze ha un segno $-$: altrimenti esplode invece di oscillare) usando il vincolo $z_C = -d\cos\theta$, cioè $\ddot{z}_C = d\dot{\theta}^2\cos\theta + d\ddot{\theta}\sin\theta$.

1. Ovviamente $R_x = 0$, in quanto non c'è nessuna forza orizzontale. R_z si può calcolare come $R_z = m(g+\ddot{z}_C)$, con $\ddot{z}_C = d\ddot{\theta}\sin\theta + d\dot{\theta}^2\cos\theta$. Al tempo $t = 0$ al quale $\theta = \theta_0$ e $\dot{\theta} = 0$. Quindi $\ddot{z}_C = -g/(1+r^2/2d^2\sin^2\theta_0) = 0.2g$ e $R_z = 21.4\,\mathrm{N}$. [È più semplice ricavarlo dall'equazione per θ].
2. Usando la conservazione dell'energia $E(\theta_0) = E(\theta_1)$ si trova $\dot{\theta}_1^2 = 2gd(\cos\theta_1 - \cos\theta_0)/(d^2\sin^2\theta_1 + r^2/2) = (1.81/\mathrm{s})^2$ e quindi $v_C = |\dot{z}_C| = |d\dot{\theta}\sin\theta| = 0.37\,\mathrm{m/s}$.
3. Linearizzando l'equazione del modo ($\sin\theta \to \theta$, $\cos\theta \to 1$, $\theta^3 \to 0$) la si riduce a $\ddot{\theta} = -\omega^2\theta$ con $\omega^2 = gd/(r^2/2) = (2.4/\mathrm{s})^2$.

Con un perno 'fisso' sarebbe stato $K = \frac{I}{2}\dot{\theta}^2$ con $I = m(r^2/2 + d^2)$ e quindi $\omega^2 = mgd/I = (1.97/\mathrm{s})^2$.

Esercizio 95: Due sbarrette incollate



[compitino del 26/03/99]. Una sbarra rettilinea sottile è costituita da due pezzi omogenei della stessa massa $m = 0.670$ kg e lunghezza $\ell = 1.20$ m incollati insieme per gli estremi. Il punto di incollaggio è rappresentato dal puntino posto a metà sbarra in figura. La sbarra può ruotare attorno ad un perno fisso posto ad uno degli estremi. La sbarra è inizialmente tenuta ferma orizzontalmente e poi lasciata libera. Non ci sono attriti. Si consideri la posizione raggiunta dalla sbarra dopo avere ruotato di un angolo pari a $\theta = \pi/3$ radianti. Determinare, in questa posizione:

1. La velocità angolare ω della sbarra. (4,-1)
2. Il valore assoluto della componente perpendicolare alla sbarra della forza che tiene incollate le due metà della sbarra. (4,-1)

Raggiunta la posizione indicata, il pezzo inferiore si stacca.

3. A che tempo, dopo il distacco, la parte libera della sbarra si trova per la prima volta in posizione verticale? (4,-1)
4. Determinare, con riferimento agli assi di figura, dove si trova il centro di massa della parte libera all'istante calcolato precedentemente. (2,-1)(2,-1)
5. Quale è la massima altezza raggiunta dal pezzo superiore nel moto successivo? (0,0)

✍**Soluzione**:

1. Quando passa per θ la sua energia cinetica $\frac{1}{2}I_{12}\dot{\theta}^2$ deve valere $\Delta V = 2mg\ell\sin\theta$. Siccome il momento d'inerzia è $I_{12} = 2m[\frac{1}{12}(2\ell)^2 + \ell^2] = \frac{8}{3}m\ell^2$ si ha $\dot{\theta}^2 = 2\Delta V/I_{12} = 3g\sin\theta/2\ell$.
2. L'equazione di moto che determina la rotazione del sistema è $I_{12}\ddot{\theta} = 2mg\ell\cos\theta$. L'equazione di moto che determina la rotazione della sbarra inferiore attorno al suo CM è $I_1\ddot{\theta}_1 = F_\theta\ell/2$ con $I_1 = m\ell^2/12$. Imponendo $\ddot{\theta}_1 = \ddot{\theta}$ si ottiene
$$F_\theta = 4mg(I_1/I_{12})\cos\theta = \frac{1}{8}gm\cos\theta$$
Alternativamente l'equazione di moto del CM della sbarra inferiore $m\ddot{\mathbf{x}}_{\rm CM1} = mg\binom{0}{1} + \mathbf{F}$ permette di ricavare la reazione vincolare. Proiettando lungo θ si ha $F_\theta = m\frac{3}{2}\ell\ddot{\theta} - mg\cos\theta$.
3. Per raggiungere la verticale deve ruotare di $\Delta\theta = \pi/6$. Siccome ruota con velocità angolare $\dot{\theta}$ costante (calcolata alla domanda 1), ci mette $\Delta t = \Delta\theta/\dot{\theta}$.
4. Il centro di massa della sbarretta staccatasi si sposta secondo la legge oraria
$$\mathbf{x}_{\rm CM}(t) = \frac{3\ell}{2}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} + \mathbf{v}_{\rm CM}t + \begin{pmatrix}0\\ gt^2/2\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_{\rm CM} = \frac{3\ell}{2}\dot{\theta}\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ +\cos\theta\end{pmatrix}$$
5. Chiamiamo m_1 la massa m della sbarretta inferiore che si stacca. Quando passa per la verticale la sua energia cinetica deve essere $\Delta V = g\ell(\frac{1}{2}m_2 + \frac{3}{2}m_1)$. Quindi
$$\omega_0^2 = \frac{2}{I_{12}}\Delta V = \frac{3g}{\ell}\frac{3m_1 + m_2}{7m_1 + m_2}$$
Il pezzo superiore da solo ha $I_2 = m_2\ell^2/3$ e
$$E = \frac{I_2}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{\ell}{2}m_2 g(1-\cos\theta), \qquad E_0 = \frac{I_2}{2}\omega_0^2, \qquad : \qquad \cos\theta_{\max} = 1 - \frac{\ell}{3g}\omega_0^2 = \frac{4m_1}{7m_1 + m_2}$$

Esercizio 96: Chiusura libro

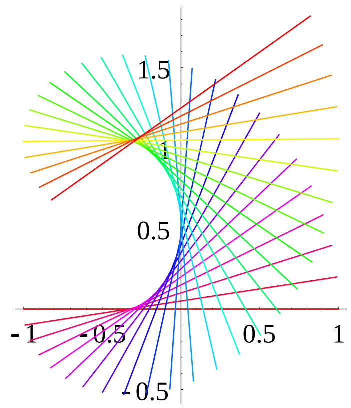
Si schematizzi un libro aperto come due bacchette (una orizzontale ed una verticale) incernierate. La bacchetta verticale viene fatta cadere da ferma dalla sua posizione di equilibrio. Si considerino i due casi $\mu = 0$ e $\mu = \infty$ (senza attrito con il tavolo; libro incollato). Quanta è l'energia dissipata nella chiusura (equivalente: quale è la sua ω un attimo prima della chiusura?) Di quanto si sposta il libro? Quanto vale $\omega(\theta)$? Quanto vale l'attrito in funzione di θ? Quale è il minimo μ tale che il libro non si sposta? Mostrare (verificato sperimentalmente!) che per $\mu \lesssim \mu_{\min}$ il libro si sposta in avanti.

✍**Soluzione**: In entrambi i casi la bacchetta orizzontale è ferma prima della chiusura. Quindi $E = MgL/2 = \frac{1}{2}I\omega^2$. Se $\mu = 0$ il libro si sposta di $-L/4$ all'indietro. Per calcolare $\omega(\theta)$ occorre osservare che il CM si muove solo in verticale, $z_{\rm CM} = ML/2\sin\theta$, mentre $x_{\rm CM} = ML/2(1+\cos\theta)$ rimane costante. Usando il teorema di Konig è facile scrivere l'energia. Non ho calcolato $R(\theta)$.

Se $\mu = 0$ il libro accelera all'inizio all'indietro, e poi accelera in avanti fino a fermarsi. Questo dovrebbe spiegare perchè in un caso pratico va in avanti.

Esercizio 97: Urto elastico di disco su sbarretta

Un disco puntiforme di massa m urta con velocità v il punto estremo di una sbarretta di lunghezza L e massa M. La sbarretta è disposta ortogonalmente a $\mathbf{v}$ e l'urto è elastico. Per quale valore di M il disco rimane fermo dopo l'urto? Nel moto successivo il disco viene colpito?



✍**Soluzione**: Si conserva p, E ed il momento angolare (rispetto a qualunque polo). Prendendo come polo il CM della sbarretta

$$mv = MV, \qquad I_G\omega = mv\frac{L}{2}, \qquad mv^2 = MV^2 + I\omega^2$$

(in pratica le prime due equazioni dicono che la forza impulsiva è $\mathcal{I} = mg$, quindi $\Delta L = I\omega = \frac{L}{2}\mathcal{I}$). Le equazioni sono risolte da $M = 4m$, $V = v/4$, $\omega L = \frac{3}{2}v$. Nel moto successivo (mostrato in figura) il disco non viene colpito, come ovvio. Per farlo colpire occorrerebbe $V' < v'$, il che e'impossibie per ogni distanza ℓ?. O meglio si può aggiungere una velocità orizzontale...

Esercizio 98: Urto pallina su disco libero di ruotare

Una dischetto di massa m e velocità v urta un disco di massa m e raggio r libero di ruotare attorno al centro con parametro d'impatto $r/\sqrt{2}$. Quale è ω nel caso che l'urto sia elastico (anelastico)? Se non c'è attrito quale è il moto del disco e la reazione del perno? Se c'è attrito dopo quanto tempo si ferma?

✍**Soluzione**: Si conserva il momento angolare rispetto al centro del disco. Se l'urto è elastico, imponendo anche la conservazione dell'energia si trova $v' = v$ e quindi $\omega = 0$ (ovvio: la forza impulsiva è radiale).

Se l'urto è anelastico e la pallina si conficca nel disco $I\omega = mvr/\sqrt{2}$. Dopo l'urto L ed E sono costanti: quindi ω è costante. Però il disco adesso è sbilenco, quindi il perno esercita una forza di reazione ricavabile da $(m+m)\mathbf{a}_{\rm CM} = \mathbf{R}$, con $\mathbf{a}_{\rm CM} = -\omega^2(r/2)\hat{\rho}$. Se invece c'è attrito esso esercita un momento costante $\mathcal{M}$, e quindi $\omega(t) = \omega(0) - \mathcal{M}t/I$. Il momento è calcolabile come $\mathcal{M} = m\mu r + \mu\rho\int_0^r\, dr 2\pi r dr$.

Esercizio 99: Urto di disco che gira

Una disco elastico di raggio r e massa m ruota con velocità anglare ω e si muove con velocità v. Urta con angolo φ contro un muro. Mostrare che (1) l'angolo di rimbalzo è $|\tan\varphi - \tan\varphi'| = 2\mu$, dove μ è il coefficiente di attrito fra disco e muro. (2) Dopo l'urto $|\omega' - \omega| = (5\mu v/a)\cos\theta$. Si assuma che la velocità ortogonale si inverta durante l'urto.

✍**Soluzione**: Si ha $\Delta p_\perp = 2mv\cos\theta$, quindi la variazione impulsiva di momento parallelo dovuta all'attrito è $\Delta p_{=}\mu\Delta p_\perp$, cioè $v\sin\varphi - v'\sin\varphi' = 2\mu v\cos\varphi$. Usando $v\cos\varphi = v'\cos\varphi'$ si ottiene la (1).

Per la (2) si usa il fatto che la variazione impulsiva di momento angolare $L = I\omega$ è $\Delta L = r\Delta p_\perp$ e che $I = \frac{2}{5}mr^2$.

Esercizio 100: Persiana

Studiare il moto di una persiana a due ante

✍**Soluzione**: È un problema a due gradi di libertà: ad esempio gli angoli θ_1 e θ_2 delle due ante.

Per risolvere il problema uno potrebbe scrivere le equazioni del moto. Ci sono 3 equazioni (a_x, a_y e L_z) per ciascuna delle due ante. Ci sono poi 2 reazioni vincolari, ciascuna con 2 componenti x e y incognite. Si ottengono quindi le 2 equazioni che servono.

Un altro modo consiste nell'usare le leggi di conservazione. Siccome uno ha 2 quantità conservate, esse bastano a determinare il moto. Si conserva l'energia

$$E = \frac{I_{\rm CM}}{2}(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) + \frac{m}{2}(\dot{\mathbf{x}}_{\rm CM1}^2 + \dot{\mathbf{x}}_{\rm CM2}^2)$$

ed il momento angolare rispetto alla cerniera $L_z = \ldots$.

Esercizio 101: Corpo appoggiato su altalena

Un corpo di massa m è appoggiato su di un corpo di massa M che oscilla appeso ad un filo. Fra i due corpi c'è attrito μ.

✍**Soluzione**:

Capitolo 14

Extra

Esercizio 102: Deflessione gravitazionale della luce

Di quanto viene deflesso un raggio di luce che sfiora il sole (a) classicamente (b) relativisticamente (ma con gravità classica).

✍**Soluzione**: Assumendo che il risultato dipenda da GM, c e b l'unica equazione dimensionalmente corretta è $\delta\theta = a(GM/bc^2)^p$. Non è difficile immaginare che $p = 1$; il problema è che a potrebbe essere zero.

(a) Apparentemente la risposta ad (a) è zero in quanto una particella di massa zero non viene attratta dalla gravità. Però non ha neanche inerzia. Supponiamo che il fotone abbia massa m. In generale il calcolo dell'angolo di deflessione per dato parametro d'impatto b non è immediato. Un calcolo perturbativo fornisce

$$\frac{dp_\perp}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{dp_\perp}{dx} = \frac{1}{c}F_\perp = \frac{1}{c}\frac{GMm}{r^2}\frac{b}{r} = \frac{GMm/c}{(x+b)^{3/2}}$$

(la potenza $3/2$ dà la semplice primitiva $\propto 1/\sqrt{1+b^2/x^2}$. Usando il teorema di Gauss verrebbe $2\pi b\int E_\perp = 4\pi$ dove $E_\perp = b/(x^2+b^2)^{3/2}$). Quindi

$$\delta\theta = \frac{\Delta p_\perp}{p_=} = \frac{m/c}{mc}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{GM}{(x+b)^{3/2}} = \frac{2GM}{bc^2}$$

Per $b = 800.000\,\mathrm{km}$ e $GM/c^2 = 1.477\,\mathrm{km}$ si ha $\delta\theta = 4\ 10^{-6}$ (von Soldrer, 1801). Il risultato non dipende da m, per cui si può fare il limite $m \to 0$. Siccome il risultato è piccolo il calcolo perturbativo è molto accurato. Per la terra l'angolo di deflessione è molto più piccolo.

(b) Relativisticamente una particella di massa zero ha perfettamente senso: il suo quadriimpulso è $P = (E/c, \mathbf{p})$ con $P^2 = 0$, cioè $p = E/c$. Il calcolo è identico: basta sostituire $m \to E/c^2$ per la 'carica gravitazionale' e $mc \to E/c$ per l'impulso parallelo. Conta solo il loro rapporto, che è $1/c^2$ in entrambi i casi. Quindi il risultato è lo stesso (Einstein, 1911).

IPrima della verifica sperimentale (1919) Einstein fece il calcolo con gravità relativistica, che dà un $\delta\theta$ doppio: trattando la gravità non relativisticamente si trascura l'equivalente magnetico del campo gravitazionale. Oggi si osserva anche nell'infrarosso con le quasar e si hanno immagini doppie (scoperta di buchi neri).

Conseguenza: Un triangolo i cui vertici sono 'attorno al sole' ed i lati sono traiettorie dei raggi di luce ha $\sum\theta > 180$ (curvatura dello 'spazio' [**?**]).

Esercizio 103: Precessione del perielio di Mercurio

Secondo la relatività generale il 'potenziale effettivo generato da una carica puntiforme è

$$V_{\text{eff}} = -\frac{GMm}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{GMm}{r}\frac{L^2}{2mr^2}\frac{2}{mc^2}$$

Mostrare che le orbite non sono più ellissi perfette.

✍**Soluzione**: Per un pianeta in orbita quasi circolare $v^2/r = GM/r^2$ ed il termine aggiuntivo dà una piccola correzione $(v/c)^2$: il pianeta più veloce è Mercurio che ha $v/c = 0.00016$. Sebbene l'effetto sia piccolo è visibile in quanto in assenza della piccola correzione relativistica si avrebbero orbite chiuse ellittiche. In presenza della piccola correzione relativistica le orbite non sono più chiuse: ad ogni rivoluzione il perielio di Mercurio varia di un piccolo angolo $\Delta\theta \sim (v/c)^2$. Se uno aspetta tante rivoluzioni l'effetto si accumula e può diventare significativo. Fortunatamente Mercurio — il pianeta più veloce — ha anche un orbita molto più eccentrica di quella degli altri pianeti: $e = 0.206$.

L'equazione delle orbite[1] è

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{m}{L^2u^2}V'_{\rm eff} = -u - \frac{GMm^2}{L^2} + \frac{3GM}{c^2}u^2$$

In assenza del termine relativistico è formalmente identica all'equazione di un pendolo con $\omega = 1$, per cui $uGMm^2/L^2(1 - e\cos 1\theta)$ dove l'"ampiezza di oscillazione" corrisponde all'eccentricità e dell'orbita.

Possiamo tenere conto del termine relativistico in approssimazione di piccole oscillazioni: si ha $\omega^2 = 1 - 6GM/r_Mc^2$ dove $r_M \approx 5.8\ 10^{10}\,\mathrm{m} = 193\,\mathrm{s}\cdot c$ è il raggio medio dell'orbita di Mercurio. Quindi $\Delta\theta = 2\pi/\omega - 2\pi \approx 6\pi GM/r_Mc^2 = 4.8\ 10^{-7}\,\mathrm{rad}$. Mercurio percorre un orbita in $T_M \approx 2\pi r_M/v_M = 2\pi\sqrt{R^3/GM} = 0.24\,\mathrm{yr}$. Quindi in un secolo la deflessione diventa $\Delta\phi(100\,\mathrm{yr}/T_M) = 0.0002 = 0°0'41''$ (in un calcolo esatto $r_M \to (1-e^2)a$, dove $a = (r_{\min} + r_{\max})/2$).

In realtà effetti di fisica Newtoniana danno una correzione maggiore: (a) influenza di altri pianeti, che danno in un secolo $\Delta\theta = (531.5 \pm 0.7)''$; (b) non sfericità del sole, che produce in un secolo $\Delta\theta = (42 \pm 1)'' \propto\sim J_2(r_{\rm sun}/r_M)^2)$; (c) sistema di riferimento non inerziale (...).

Una volta sottratti gli effetti Newtoniani le misure indicano una precessione del perielio di Mercurio in accordo con la relatività generale.

Un corpo con $L \neq 0$ può cadere nell'origine, in presenza di un potenziale più attrattivo della barriera centifuga replusiva $L^2/2mr^2$. Il potenziale gravitazionale relativistico è un esempio.

[1] Si ricava dall'equazione del moto $ma_\rho = F_\rho$, cioè $m\ddot{r} = -V'_{\rm eff}$, usando la conservazione del momento angolare $L = mr^2 d\theta/dt$ per sostituire la derivata rispetto al tempo con la derivata rispetto a θ: $d/dt = (L/mr^2)\ d/d\theta$. L'equazione viene molto più bella, almeno per una forza $\propto 1/r^2$, se invece di r si usa $u \equiv 1/r$. Quindi

$$m\ddot{r} = m\frac{d}{dt}\frac{d}{dt}r = m\frac{Lu^2}{m}\frac{d}{d\theta}\frac{Lu^2}{m}\frac{d}{d\theta}u(\theta) = -\frac{L^2u^2}{m}\frac{d}{d\theta}\frac{du}{d\theta}$$

ed, alla fine, $d^2u/d\theta^2 = -(m/L^2u^2)V'_{\rm eff}$.

Parte II

Relatività

Capitolo 15

Trasformazioni di Lorentz

15.1 Trasformazioni di Lorentz

1. Lorentz le ha ottenute come invarianze delle equazioni di Maxwell, che comunque sono accdentalmente invarianti anche sotto altre trasformazioni non interessanti (siccome il fotone è massless, sono invarianti sotto dilatazioni e traformazioni conformi). Si pensava che le equazioni di Maxwell valessero solo nel sistema di quiete dell'etere.

2. Il modo più semplice di ottenerle è quello originale (1905). Lo sconvolgente esperimento di Michelson-Morley (eseguito dopo il 1880; mostrò che la velocità della luce è la stessa in tutti i sistemi di riferimento) in relatà non sconvolse nessuno per 25 anni. Il risultato sperimentale poteva venir spiegato in modi diversi:

   - l'etere viene trascinato dalla Terra;
   - le equazioni dell'elettromagnetismo sono valide nel sistema di quiete dell'etere. La materia è tenuta assieme da forze elettromagnetiche e si contrae quando è in moto rispetto all'etere in modo da simulare la costanza della velocità della luce.
   - relatività: non esiste l'etere, tutti i sistemi inerziali sono equivalenti, ma la velocità della luce è la stessa rispetto ad ogni osservatore inerziale.

   Oggi si sa che la soluzione giusta è la terza. Riducendosi $txyz \to tx$ ed imponendo la costanza della velocità della luce c nelle due direzioni $(x' - ct') \propto (x - ct)$ ed $(x' + ct') \propto (x + ct)$ si trova, sommando e sottraendo le due relazioni

   $$x' = \gamma(x - \beta ct), \qquad ct' = \gamma(ct - \beta x)$$

   dove β e γ sono due costant incognite. Dalla definizione di velocità relativa v $x' = \gamma(x - vt)$ si trova $\beta = c/v$

   $$x' = \gamma(x - vt), \qquad ct' = \gamma(ct - vx/c^2)$$

   L'unico punto non ovvio è fissare γ. Invertendo le relazioni ed imponendo la 'reciprocità': $x = \gamma(x' + vt')$ si trova $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

3. Una volta ottenute si riconosce che lasciano $D^2 = (ct)^2 - \mathbf{x}^2$ invariante anche quando non vale zero e sono quindi le trasformazioni di SO(3,1). (A posteriori questo è il modo più ovvio di ricavare le trasformazioni di Lorentz). È utile usare i quadrivettori: la quadriposizione X_μ ed il quadri-impulso $P_\mu = mc\, dX_\mu/d\tau = m\gamma\, dX_\mu/dt = m\gamma(c, \mathbf{v}) = (E/c, \mathbf{p})$ ($P^2 = m^2c^4$, come nel sistema di quiete) perchè i loro 'prodotti scalari' non sono 'relativi': sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento. (Usare $t \to \tau$ dà una quantità relativistica; qualunque altro scalare andrebbe bene e le equazioni corrette si ottengono richiedendo che il risultato non dipenda dalla scelta del parametro (invarianza di gauge)).

   Altro modo: assumendo che nel sistema a riposo $P = (mc, 0)$ allora rispetto ad un qualunque altro sistema

   $$P_S = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} mc \\ 0 \end{pmatrix}_{S_0} = \gamma \begin{pmatrix} mc \\ mv \end{pmatrix}$$

[1]

[1] formula di Larmor: $2/3e^2a^2 : sea^2 - - > v.a$ non sarebbe invariante di Galileo. In Lorentz questo e'automatico nel formalismo: V.A = 0

15.2 Dilatazione tempi e contrazione lunghezze

Attenzione: sono solo alcune conseguenze valide in alcuni semplici situazioni particolari. Vari esercizi successivi propongono casi più generali: per risolveri non basta moltiplicare o dividere per γ.

- **Dilatazione tempi**. Confronto il valore di Δt compreso fra due eventi (ad esempio produzione e decadimento di una particella) rispetto a due diversi sistemi di riferimento. Un sistema S_0 di riferimento è quello in cui i due eventi avvengono nella stessa posizione (il sistema di quiete della particella); l'altro S (ad esempio la particella potrebbe essere un μ atmosferico ed $S =$ il sistema di riferimento della terra). Allora $\Delta t = \gamma(\Delta t_0 - v/c^2\ \Delta x_0) = \gamma \Delta t_0$ in quanto $\Delta x_0 = 0$. Invece non si ha $\Delta t_0 = \gamma \Delta t$ in quanto $\Delta x \neq 0$!

  Dal nostro punto di vista un μ arriva a terra perchè ha una vita media allungata: $\tau = \gamma\tau_0$. Come funzionano le cose dal 'suo' punto di vista? Mostriamo che la terra deve sembrare più corta: $\ell = \ell_0/\gamma$.

- **Contrazione lunghezze**. Nel sistema di riferimento del μ la terra si muove verso di lui con velocità v. Quanto spazio percorre la terra fra la produzione ed il decadimento del μ? Percorre $\ell = \tau_0 v$. Quanto spazio percorre il μ rispetto alla terra: $\ell_0 = \tau v = \gamma \ell$. Notare che $\ell_0 =$ 'lunghezza della terra a riposo' ed $\ell =$ 'lunghezza della terra vista dal μ'. Più in generale

  $$\text{(lunghezza misurata da un sistema in moto)} = \text{(lunghezza a riposo)}/\gamma$$

  Per capirlo, guardiamo come un treno che si muove a velocità v è visto dal sistema di riferimento (x, t) del treno e dal sistema (x', t') della stazione. All'istante $t = t' = 0$ la testa del treno passa per $x = x' = 0$. Se all'istante $t = 0$ il macchinista (in cima al treno) ed il bigliettaio (in fondo al treno) si sporgono e fanno un segno sulla banchina, la distanza fra i segni è $\Delta x' = \gamma(\Delta x + v\Delta t) = \gamma \ell_0$.

  Un osservatore fermo nella stazione invece misura la lunghezza del treno ℓ facendo fare ad un dato istante $t' = \gamma(x + vt/c^2) = 0$ due segni sulla banchina corrispondenti ai due capi del treno: uno ad $x' = 0$ ed uno ad $x' = \gamma(x + vt) = \gamma \ell_0(1 - v^2/c^2) = \ell_0/\gamma$. Il treno viene misurato più corto della sua lunghezza a riposo.

- **Addizione velocità** $\dot{x}' = dx'/dt' = \gamma(dx + v\ dt)/\gamma(dt + v/c^2\ dx) = (\dot{x} + v)/(1 + \dot{x}v/c^2)$.

Esercizio 104: Viaggio che dura d/c

La stella più vicina è praticamente ferma rispetto alla Terra e dista $d = 4.25$ anni luce. Un viaggiatore si dirige verso di essa a velocità costante e vi arriva 4.25 anni più vecchio di quando era partito. È possibile? Quanto vale v?

✍**Soluzione**: Si può ragionare in diversi modi.

- Ha senso applicare la contrazione delle lunghezze a questo problema: rispetto al viaggiatore la distanza da percorrere è contratta $d' = d/\gamma$. L'equazione $v \cdot t' = d'$ con i dati del problema $t' = d/c$ diventa $\gamma\beta = 1$ la cui soluzione è $\beta = v/c = c/\sqrt{2}$.

- Alternativamente si può ragionare applicando le trasformazioni di Lorentz. Nel sistema S in cui terra e stella sono in quiete l'evento d'arrivo ha coordinate $(ct_A, x_A) = d(c/v, 1)$. Nel sistema S' del viaggiatore $ct'_A = \gamma(t_A - v/c^2\ x_A) = d/\gamma\beta$ deve valere d. Si ottiene nuovamente $\gamma\beta = 1$ cioè $\beta = v/c = c/\sqrt{2}$.

- Alternativamente si usa l'invarianza della quadri-distanza sotto trasformazioni di Loretnz: $c^2\Delta t'^2 = c^2\Delta t^2 - x^2$ da cui $1 = c^2/v^2 - 1$, e nuovamente $v^2 = c^2/2$,

Esercizio 105: Saluto alla bandiera

Un soldato su marte deve fare il 'saluto alla bandiera' mentre viene innalzata sulla terra. Per quanto tempo deve salutare? ($d = 260\,\mathrm{s} \cdot c$, velocità relativa trascurabile).

✍**Soluzione**: $\Delta t' = \gamma(\Delta t + v/c^2\ \Delta x)$ deve essere zero per ogni v. Quindi $\Delta t = (v/c)d/c$. Siccome $-1 < v/c < 1$ deve salutare per $T = 2d/c = 520\,\mathrm{s}$.

Esercizio 106: Attentato relativistico

Un treno attraversa una galleria. La lunghezza a riposo del treno è $L_T = 200\,\mathrm{m}$, la lunghezza a riposo della galleria è $L_G = 100\,\mathrm{m}$. Due bombe vengono fatte esplodere contemporaneamente alle due imboccature della galleria, mentre il treno sta per uscire dalla galleria. A quale velocità deve viaggiare il treno per salvarsi?

✍**Soluzione**: Dal punto di vista dell'attentatore il treno è contratto: se $L_T/\gamma < L_G$ (cioè se $\gamma > 2$, cioè $v/c > \sqrt{3}/2$) il treno è tutto dentro la galleria e si salva.

Dal punto di vista del treno, la galleria è contratta quindi a nessun istante il treno è tutto dentro la galleria: $L_T > L_G/\gamma$. Tuutavia la distanza fra le esplosioni vista dal treno è dilatata: $\Delta x_T = \gamma(\Delta x_G + v\Delta t_G) = \gamma L_G$ e si ha $L_T < \Delta x_T$ per $\gamma > 2$.

Usando la contrazione della galleria lo stesso calcolo è più complicato. Nel momento in cui la testa del treno sta per uscire dalla galleria un pezzo di treno $L_T - L_G/\gamma$ non è ancora entrata. Il treno si salva se la bomba all'imbocco esploda abbastanza tempo dopo quella all'uscita della galleria. All'istante $t_G = 0$ le due bombe situate a $x_G = 0$ ed $x_G = L_G$ esplodono. Fissando il segno tramite $x_T = \gamma(x_G - vt_G)$, si ha $t_T = \gamma(t_G - vx_G/c^2)$. Quindi la carica a $x_G = L_G$ esplode un tempo $\Delta t_T = \gamma v L_G/c^2$ prima dell'altra carica. In questo tempo la galleria percorre una distanza $-v\Delta t_T = -\gamma(v/c)^2 L_G$. Quindi il treno si salva se $L_T - L_G/\gamma < \gamma\beta^2 L_G$ cioè se $L_T < \gamma L_G(\beta^2 + \gamma^{-2}) = \gamma L_G$ come prima.

Esercizio 107: Relatività: caduta in una buca

Analogo a prima, ma con treno 'rigido' che casca in una buca (manca il ponte).

✍**Soluzione**: Calcoliamo il CM di due particelle di ugual massa e velocità v_i. Nel sistema S $x_i = v_i t$ e $x_{S\mathrm{CM}} = (v_1 + v_2)t/2$. In un sistema S' generico $t' = \gamma(t + vx/c^2) = \gamma t(1 + vv_i/c^2)$ e $x' = \gamma(x + vt) = \gamma(v + v_i)t = v_i' t'$ con $v_i' = (v + v_i)/(1 + vv_i/c^2)$. Abbiamo ricavato la legge di addizione delle velocità. Sapendo quello che viene possiamo fare il passaggio inverso senza calcoli: $v'_{S'\mathrm{CM}} = (v_1' + v_2')/2$, corrisponde a $v_{S'\mathrm{CM}} = (v'_{S'\mathrm{CM}} - v)/(1 - v'_{S'\mathrm{CM}} v/c^2)$. Espandendo si trova

$$\Delta v_{\mathrm{CM}}(v) = v_{S'\mathrm{CM}} - v_{S\mathrm{CM}} = -\frac{1}{2}\frac{v(v_1 - v_2)}{2c^2 + v(v_1 + v_2)} \sim \frac{(v_1 - v_2)^2}{4c}\frac{v}{c}$$

che è una funzione monotona di v. La massima variazione di $\Delta v_{\mathrm{CM}}(c) - \Delta v_{\mathrm{CM}}(-c) = 2c(v_1 - v_2)^2/[(v_1 + v_2)^2 - 4c^2]$.

Esercizio 108: Centrifuga relativistica

Un punto e sul bordo di una centriguga in rotazione $e$mette un fotone con un certo angolo θ, che viene $r$icevuto da un punto r. Si calcoli di quanto varia l'energia del fortone in funzione della frequenza di rotazione e dell'angolo di emissione.

✍**Soluzione**: Non varia.

In generale l'energia di una particella di quadriimpulso P nel sistema in cui una particella di quadrivelocità U è ferma è $E/c = P \cdot U$. Chiamiamo U_e e U_r le quadrivelocità dell'emettitore e del ricevitore. L'energia del fotone emesso è $E_e/c = P \cdot U_e$ e l'energia del fotone ricevuto è $E_r/c = P \cdot U_r$. Siccome $U_r^0 = U_e^0 = \gamma$ sono uguali e $\mathbf{u}_e \cdot \mathbf{p} = \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{p}$ sono uguali (l'angolo è lo stesso) non c'è alcun effetto.

Esercizio 109: Compitino del 31/5/1997

Astronave cubica.

✍**Soluzione**:

1. $V = L^2/\gamma_T = 1.7409\,\mathrm{km}^3$ dove $\gamma_T = 1.262$ è il γ dell'astronave vista dalla terra.

2. Si potrebbe fare addizionando le velocità. Introducento invece i quadrivettori velocità della terra e dei proiettili

$$V_T = \gamma_T \begin{pmatrix} c \\ -v_T \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad V_{P=} = \gamma_P \begin{pmatrix} c \\ v_P \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad V_{P\perp} = \gamma_P \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ v_P \end{pmatrix}$$

ed usando il fatto che nel sistema S'_T dove la terra è ferma, $V_T = c(1,0,0)$, i γ dei proiettili visti nel sistema S'_T sono $\gamma_P = V_T \cdot V_P/c^2$. Quindi $\gamma'_P = \gamma_P\gamma_T(1 + \mathbf{v}_P \cdot \mathbf{v}_T)$. In particolare, per un proiettile lanciato parallelo al moto

$$v'_{P=} = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma'^2_{P=}}} = \ldots = \frac{v_P + v_T}{1 + v_P v_T/c^2} = 0.8542c$$

(il calcolo un po'noioso mostra che coincide con la formula di addizione relativistica delle velocità).

3. Per un proiettile lanciato perpendicolare al moto $\gamma'_{P\perp} = \gamma_{P\perp}\gamma_T = 1.46$ e quindi $v'_{P\perp} = 0.7317c$.

4. e 5. Nel sistema dell'astronave in entrambi i casi la risposta sarebbe $\Delta t_A = L/v_P$. Solo nel secondo caso l'intervallo di tempo visto dal sistema della terra è $\Delta t'_T =_T \Delta t_A$: nel caso parallelo i punti di arrivo e partenza hanno posizioni diverse

$$\Delta X_= = \begin{pmatrix} cL/v_P \\ L \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \Delta X_\perp = \begin{pmatrix} cL/v_P \\ 0 \\ L \end{pmatrix}$$

In entrambi i casi $\Delta t'_T = \Delta X \cdot V_T/c^2$, che vagono $\Delta t'_{P=} = L\gamma_T(1/v_P + v_A/c^2) = 14.059$ e $\Delta t'_{P\perp} = \gamma_T \Delta t_A = 10.72$. Nel primo caso (quello non ovvio) si potrebbe anche utilizzare una trasformazione di Lorentz: $t' = \gamma_T(t_A + x_A v/c^2)$.

Esercizio 110: Supernova 1987

Il 23 febbraio 1987 sono stati rilevati sulla Terra la luce ed alcuni neutrini emessi durante il collasso di una supernova distante $d = 55\,\text{Kpc}$. Sapendo che il collasso dura $\Delta t \approx 10\,\text{s}$, e che la luce ed i neutrini di energia $E_\nu \approx 10\,\text{MeV}$ sono stati rivelati contemporaneamente (a) Porre un limite superiore sulla massa dei neutrini (b) Assumendo di conoscere la massa m_ν, porre un limite superiore sulla vita-media dei neutrini.

✍**Soluzione**: Conviene convertire pc $= 3.26\,$ly, quindi $d = 5.6\ 10^{12}c$ s. inoltre $E = 10\,\text{MeV} = 10^7\,\text{eV}$.

1. Una particella ultra relativistica ha velocità $v/c = 1 - m^2c^4/2E^2$. Per la luce il tempo di viaggio vale $T_\gamma = d/c$, per i neutrini $T_\nu = d/v = d/c(1 + m_\nu^2 c^4/2E_\nu^2)$. Imponendo $T_\nu - T_\gamma = d/cm_\nu^2c^4/2E_\nu^2 < \Delta t$ si trova ($c = 1$) $m_\nu < E_\nu\sqrt{2d\Delta t} = 18\,\text{eV}$. Quando verrà rilevata la prossima esplosione di supernova (una ogni 30 anni circa) gli esperimenti potranno misurare come Δt dipende da E_ν e porre limiti $m_\nu \lesssim$ eV, quasi competitivi con limiti da esperimenti diretti.

2. Sicuramente $m_\nu c^2 \ll E_\nu$. Nel nostro sistema di riferimento il neutrino è vissuto più di $T_\nu \approx d/c = 180.000$ anni. Nel suo sistema di quiete è vissuto almeno $\tau = T_\nu/\gamma = T_\nu m_\nu c^2/E_\nu = 5\ 10^5\,\text{s}(m_\nu c^2/\,\text{eV})$.

Esercizio 111: Stati legati relativistici

Un elettrone di massa m_e gira attorno ad un protone di massa $m_p \approx 2000 m_e$ con velocità $v \approx c/137.036$ in un orbita circolare. Quanto pesa l'atomo di idrogeno risultante?

✍**Soluzione**: Nel sistema di riferimento del centro di massa (rispetto al quale l'atomo ha impulso zero) vale $m = E/c^2$. Siccome il sistema è non relativistico possiamo calcolare la usa energia come $E = (m_p+m_e)c^2+K+V$. Possiamo trascurare l'energia cinetica del protone: quindi $K = \frac{1}{2}m_e v^2$ e $V = -2K$ (come si ottiene facendo il calcoletto con la forza di Coulomb, o dal teorema del viriale). In conclusione $m = m_p + m_e(1 - v^2/2c^2)$, cioè l'atomo di idrogeno pesa pochissimo meno di un protone e di un elettrone. L'effetto è piccolo perchè l'elettrone non è relativistico.

Nel caso delle forze nucleari la correzione alla massa dovuta all'energia di legame è un effetto significativo (qualche per mille). A livello di particelle elementari l'effetto è ancora piì importante: una persona pesa circa 1 kg di materia (somma delle masse degli elettroni e dei quark), il resto è dato dall'energia di legame di protoni e neutroni.

Capitolo 16

Urti relativistici

Esercizio 112: Produzione particella

Quale e'la particella più pesante ottenibile facendo urtare due elettoroni (a) di energia $E_1 = E_2$ (b) di energia E_1 ed $E_2 = m_e$? Quale energia devono avere i due elettroni per produrre una Z ($M_Z \approx 178500 m_e$) nelle due configurazioni?

✍**Soluzione**:

1. Con due fasci posso produrre particelle ferme. Quindi $Mc^2 = 2E_{1,2}$. Per produrre una Z servono due elettroni con energia $E = M_Z c^2/2 = 89220 m_e c^2$.

2. Con un solo fascio, mandato a sbattere su materia ferma $M^2 = P'^2 = (P_1 + P_2)^2 = 2m^2 + 2mE$ quindi $M = m\sqrt{2(1+\gamma)}$. Per produrre una Z serve $E/m_e c^2 = \gamma = M^2/(2m^2) - 1 = 1.59\ 10^{10} \gg 89220$.

Il caso 2 viene chiamato 'sistema del laboratorio' solo per motivi storici; un esperimento intelligente è costruito come nel caso 1.

Se volessimo fare il conto in 2 senza usare quadrivettori verrebbe molto più complicato (sebene sia un semplicissimo urto a 3 corpi in una dimensione). Le leggi di conservazione $m_e + E_e = E$ e $0 + p_e = p$ da cui

$$M^2 = E^2 - P^2 = (m_e + E_e)^2 - p_e^2 = (m_e + E_e)^2 - (E_e^2 - m_e^2) = 2m_e^2 + 2m_e E_e$$

Esercizio 113: Ellisse

In urto generico i valori possibili dell'impulso finale sono su di un ellisse. (Parametrizzare con $\theta_{\rm CM}$)

✍**Soluzione**:

Esercizio 114: Produzione particella *

(compitino del 5/4/95)

✍**Soluzione**: Basta usare la conservazione del quadriimpulso $P = P_1 + P_2$ con $P^2 = (Mc)^2$.

1. Per trovare le energie contraggo con P: $P^2 = P \cdot (P_1 + P_2) = M(E_1 + E_2)$ da cui $E_i = M/2$. Per cui LEP che produce $e\bar{e}$ con $\gamma = 10^5$ può produrre particelle di $M_Z \approx 100\,\text{GeV}$.

2. Nel sistema del laboratorio $P_2 = (m_2 c, 0)$. Contrarre con P_2 potrebbe sembrare una buona idea ma porta in gioco E che non ci interessa. Invece $P^2 = (P_1 + P_2)^2$ fornisce direttamente $M^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2m_2(E_1/c^2)$, da cui $E_1/c^2 = (M^2 - 2m^2)/(2m)$ cioè $\gamma_1 = 2M^2/m^2 - 1$. potrebbe anche fare addizionando le velocità relativisticamente: $\beta_{\rm lab} = 2\beta/(1+\beta^2)$ da cui $\gamma_{\rm lab} = \ldots = 2\gamma^2 - 1$.

3. L'impulso è $p = p_1 + p_2 = p_1 = \sqrt{E_1^2/c^2 - m^2 c^2} \approx E_1/c$ (il problema è ultra-relativistico).

Esercizio 115: Urto neutrino-elettrone

Un neutrino emesso dal sole urta con un elettrone in quiete sulla terra. L'esperimento Borexino è in grado di misurare l'energia cinetica dell'elettrone urtato. Quale è l'energia minima e massima del neutrino? L'esperimento HELLAZ spera di saper misurare anche la direzione dell'elettrone urtato. Quale è l'energia del neutrino incidente?

Soluzione: Introduzione: Il problema dei neutrini solari. usando il teorema del viriale $K = -V/2$ con $K = \frac{3}{2}NkT$ e $V = -3GM^2/5R$ si stima la temperatura 'media' del sole $T \sim GM^2/NRk \sim 10^{6\div 7}$ K. A questa temperatura la reazione nucleare dominante è $4p + 2e \to {}^4\mathrm{He} + 2\nu_e + 53\,\mathrm{MeV}$. I 53 MeV escono dal sole come fotoni: quindi misurando la luce emessa dal sole si può predire il numero di neutrini emessi dal sole. Vari esperimenti misurano un numero di neutrini che è circa la metà di quello previsto. L'esercizio mostra come un nuovo esperimento potrà dire come il deficit di neutrini dipende dalla loro energia.

Si può fare 'a mano' il caso semplice $\cos\theta = 1$ e capire che misurando E'_e si riscostruisce E_ν. Per $\cos\theta$ generico siccome P'_ν non mi interessa prendo il modulo di $P'_\nu = P_\nu + P_e - P'_e$ nel sistema del laboratorio dove $P_e = (m_e, 0, 0, 0)$, $P_\nu = (E_\nu, E_\nu, 0, 0)$ e $P'_e = (E'_e, p'_e\cos\theta, p'_e\sin\theta, 0)$. Trovo

$$0 = 0 + 2m_e^2 + 2m_eE_\nu - 2m_eE'_e - 2E_\nu(E'_e - p'_e\cos\theta) \qquad : \qquad E_\nu = \frac{m_e(E'_e - m_e)}{E'_e - p'_e\cos\theta - m_e} = \frac{m_e}{\cos\theta\sqrt{1 + 2m_e/K'_e} - 1}$$

dove $K'_e \equiv E'_e - m_e$ è l'energia cinetica dell'elettrone urtato. Quindi se $\cos\theta$ non è misurato si può solo dire che $E_\nu > \frac{1}{2}K'_e(1 + \sqrt{1 + 2m_e/K'_e})$. Se anche l'angolo θ fra il solo e la direzione di moto dell'elettrone urtato viene misurata si ricava E_ν.

Sfortunatamente gli esperimenti riescono a vedere questi urti solo se l'energia è abbastanza grande $E_\nu \sim K'_e \gtrsim 10m_e \gg m_e$. In questo limite la formula diventa $E_\nu = m_e/(\cos\theta - 1)$ (con $\cos\theta \approx 1$, urto in avanti): per dire qualcosa su E_ν occorrerebbe misurare θ con precisione maggiore di quella attualmente ottenibile.

Esercizio 116: Urto neutrino-neutrone

Un neutrino emesso dal sole urta un neutrone in quiete sulla terra, producendo un protone ed un elettrone. Cosa si può dire sull'energia del neutrino misurando solo l'energia dell'elettrone?

Soluzione: Tutto. La reazione è $\nu n \to pe$. Procedendo come nell'esercizio precedente scrivo la conservazione dell'energia-impulso come $P'_p = P_\nu + P_n - P_e$ e prendo il modulo quadro

$$m_p^2 = m_n^2 + m_e^2 - 2m_nE'_e + 2E_\nu(m_n - E'_e + p'_e\cos\theta)$$

da cui posso ricavare E_ν. Come discusso prima i neutrini solari misurabili hanno energia E_ν tale che $m_e \ll E_\nu \ll m_p \approx m_n$, Siccome $E'_e \approx E_\nu$ la formula per E_ν si semplifica in $E_\nu \approx E'_e + (m_n^2 - m_p^2)/2m_n$. Tenendo conto che $m_n - m_p \ll m_p$, si semplifica ancora in $E_\nu \approx E'_e + (m_n - m_p)$. Quindi, a differenza del caso precedente, dalla sola misura di E'_e ricavo l'energia del neutrino.

Questa formula non e'altro che la legge di conservazione dell'energia, nella quale si è approssimato $E'_n \approx m_n$. Questa approssimazione corrisponde ad un fatto ben noto in urti non relativistici: quando una particella leggera urta una particella pesante, la velocità della particella pesante (e quindi la sua energia) variano in modo trascurabile. Analogamente per $\bar\nu_e p \to n\bar e$ vale $E_\nu \approx E'_{\bar e} - (m_n - m_p)$. La reazione $\nu d \to ppe$ è molto più complicata, ma con ottima approssimazione $E_\nu \approx E'_e + (m_d - 2m_p)$ (il deuterio d è uno stato legato np).

Esercizio 117: Massa dai prodotti di decadimento

Un particella di massa m decade in due fotoni, dei quali si misurano le energie E_1 ed E_2 e l'angolo θ fra gli impulsi. Determinare m.

Soluzione: $m^2 = P^2 = (P_1^2 + P_2^2) = 2P_1 \cdot P_2 = 2(E_1E_2 - p_1p_2\cos\theta) = 2E_1E_2(1 - \cos\theta)$.

Esercizio 118: Effetto Compton

Mandando raggi X su elettroni fermi nel 1923 Compton trovò $\lambda'(\theta) = \lambda + 0.024\text{\AA}(1-\cos\theta)$. Si mostri che questa è la relazione cinematica per $\gamma e \to \gamma e$ considerando il fotone come una particella di energia $E = h\nu = hc/\lambda$. (Esercizio a 4 particelle, preliminare al prossimo compitino).

✍**Soluzione**: Scrivo $P_\gamma + P_e = P'_\gamma + P'_e$ con

$$P_\gamma = (E/c, E/c, 0, 0), \qquad P_e = (m_e c, 0, 0, 0), \qquad P'_\gamma = (E', E'\cos\theta E'\sin\theta)/c$$

(mostrare che il numero incognite = equazioni +1, come dovrebbe essere). Siccome P'_e non mi interessa ricavo direttamente il risultato riscrivendo la conservazione del quandri-impulso come $P'_e = (P_\gamma - P'_\gamma + P_e)$ e prendendo il modulo quadro:

$$m_e^2 = m_e^2 + 0 + 0 + 2m_e(E - E') + 2EE'(\cos\theta - 1)$$

cioè

$$\frac{1}{E'} = \frac{1}{E} + \frac{1-\cos\theta}{m_e c^2}, \qquad \lambda' = \lambda - \lambda_{\text{Compton}}(1-\cos\theta)$$

dove l'ultima equazione è stata ricavata usando l'equazione quantistica (compatibile con la relatività!) $\lambda_{\text{Compton}} = h/m_e c^2 = 2.4\ 10^{-12}\,\text{m}$. $E = h\nu$ significa che non posso affievolire la luce sotto un certo limite.

Esercizio 119: Compitino del 31/5/1996

Urto relativistico.

✍**Soluzione**:

1. La minima energia è quella per produrle ferme: $2E = 2m'c^2$.

2. Usando i quadrivettori: $P_1 + P_2 = P'_1 + P'_2$. Abbiamo visto che nell'urto minimo nel CM $P'_1 = P'_2 = (m'c, 0)$. Definendo $P_{\text{min}} = P'_1 + P'_2 = (2m'c, 0)$ ed usando il fatto che anche lui è un quadrivettore e quindi $P^2_{\text{min}} = (2m'c)^2$ in ogni sistema, la soluzione si ottiene da $(P_1 + P_2)^2 = P^2_{\text{min}}$. Nel sistema del laboratorio $P_1 = (E/c, p)$ e $P_2 = (mc, 0)$, per cui $P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2 = 2(mc)^2 + Em = 4m'c^2$, quindi $E = (4m'^2 - 2m^2)/(2m)c^2$.

3. Relativisticamente il CP è il sistema S' dove $P = P_1 + P_2 = (E/c + mc, p)$ ha impulso spaziale $P_{x'}$ zero. Facendo una trasformazione di Lorentz $P_{x'} = \gamma(P_x - (v/c)P_t)$ si trova $v/c = P_x/P_t = p/(E/c + mc) \approx 1 - mc^2/E \approx 0.9$.

   Alternativamente scrivo P come un quadrivettore generico $P = \mathcal{M}\gamma(c, v)$ e trovo nuovamente v.

4. La più generica soluzione di $P'_1 + P'_2 = P_{\text{tot}} = (E_{\text{tot}}/c, p_{\text{tot}})$ è

   $$P'_1 = (E'/c, p'_x, p'_y, 0), \qquad P'_2 = ((E_{\text{tot}} - E)/c, p_{\text{tot}} - p'_x, p'_y, 0)$$

   Contiene 3 parametri, ma bisogna ancora imporre che $P_i'^2 = m'^2$. Rimane un parametro libero, fissato dai dati del problema $E' = 7mc^2$. Si ottiene quindi il sistema di due equazioni e due incognite

   $$\begin{aligned} 2.25 &= 7^2 - p_x'^2 - p_y'^2 \\ 2.25 &= 3.4^2 - (9.34 - p'_x)^2 - p_y'^2 \end{aligned}$$

   La prima equazione dice che $p' \equiv \sqrt{p'^2} = 6.83$. Sottraendo le due equazioni si ottiene un'equazione lineare per p'_x: $124 - 18.7p'_x = 0$, cioè $p'_x = 6.67$. Quindi $\cos\theta_{\text{lab}} = p'_x/p' = 0.976$.

5. Esiste una formula speciale per la trasformazione relativistica dell'angolo. È più semplice partire da zero. Nel sistema del CM θ_{CM} è dato

   $$P_2 = (E_{\text{CM}}/c, p_{\text{CM}}, 0, 0), \qquad P'_2 = (E'_{\text{CM}}/c, p'_{\text{CM}}\cos\theta_{\text{CM}}, p'_{\text{CM}}\sin\theta_{\text{CM}}, 0)$$

Nel sistema del lab gli stessi quadrivettori si scrivono come

$$P_2 = (mc, 0), \qquad P_2' = (E'_{2\rm lab}/c, ?, ?, ?)$$

dove $E'_{2\rm lab}$ è richiesto dal problema e ? non interessa. Si nota quindi che la soluzione è ottenibile calcolando $P_2 \cdot P_2'$ nei due sistemi: $mE'_{2\rm lab} = E_{\rm CM}E'_{\rm CM}/c^2 \pm p_{\rm CM}p'_{\rm CM}\cos\theta_{\rm CM}$. [torna col +; $\cos\theta_{\rm CM} = -0.97$]. L'energia di CM $E_{\rm CM} = E'_{\rm CM}$ si può calcolare come $P_1 + P_2 = (E_1/c + mc, p_1)_{\rm lab} = (2E_{\rm CM}/c, 0)_{\rm CM}$. Siccome $p_1 = 9.34$ si ha $E_{\rm CM} = 2.28$ e quindi $p_{1\rm CM} = 1.71$ e $p_{2\rm CM} = 1.78$. Alla fine $E'_{\rm lab} = 2.28^2 - 3.42 = 1.78228$.

Esercizio 120: Tachioni

Mostrare che particelle più veloci della luce renderebbero instabili le particelle normali, se interagiscono con esse.

✍**Soluzione**: Una particella normale può decadere se $m = \sum E_i/c^2 > \sum m_i$ Quindi $\pi^0 \to 2\gamma$ è possibile ma $\gamma \to e^- e^+$ no.

Una particella più veloce della luce ha $P_t^2 = -(m_t c^2)^2$. (È ovvio geometricamente; è meno ovvio usando $P = mV$ in quanto $V \neq dX/d\tau$ in quanto una particella che non è ferma in nessun sistema di riferimento non ha tempo proprio τ.). Se esiste un tachione t il decadimento $e \to et$ è possibile e l'elettrone acquista energia.

- Con i quadrivettori: $P_t = P_e - P_e'$ da cui $-m_t^2 = 2m_e^2 - 2m_e E'/c^2$ cioè $E' = (m_e + m_t^2/2m_e)c^2 > E = m_e c^2$.
- Scrivendo $P_e = (m_e c, 0)$, $P_e' = (E'/c, p)$, $P_t = (E_t/c, -p)$ devo imporre che

$$m_e = E' + E_t, \qquad (cp)^2 = E'^2 - (m_e c^2)^2 = E_t^2 + (m_t c^2)$$

Dalla prima ricavo E_t e lo inserisco nella seconda ottenendo nuovamente lo stesso $E' > E$.

Parte III

Termodinamica

Capitolo 17

Lavoro ed energia

Esercizio 121: Temperatura di una lampadina

Stimare la temperatura di un filo di lampadina, sapendo che la potenza irraggiata per unità di superficie è $P/S = \epsilon\sigma T^4$ dove la costante di Stefan-Boltzmann vale $\sigma = \pi^2 k_B^4/60\hbar^3 c^2 = 5.670\ 10^{-8}\,\mathrm{W}/(\mathrm{m}^2\,\mathrm{K}^4)$. L'emissività $\epsilon \in [0\ldots 1]$ dipende dal materiale.

✍**Soluzione**: (Questo esercizio non dovrebbe stare qui). (nel limite 'classico' $\hbar \to 0$ $\sigma \to \infty$:...). Una lampadina può essere fatta di un filo di $\ell = 2\,\mathrm{cm}$ di tungusteno ($\epsilon \approx 0.4$) di diametro $d = 0.05\,\mathrm{mm}$. Se consuma una potenza di $P =$ W deve avere una temperatura tale che $P = \epsilon\sigma(T^4 - T^4_{\rm ambiente})S \approx \epsilon\sigma T^4 S$. Siccome $S = \pi d\ell = \pi\ 10^{-6}\,\mathrm{m}^2$ serve $T = 1940\,\mathrm{K}$. Con $P = 100\,\mathrm{W}$ viene $T = 6210\,\mathrm{K}$, e quindi una luce simile a quella del sole. È chiaro quali problemi tecnologici occorre risolvere prima di poter costruire una lampadina.

Esercizio 122: Temperatura di un oggetto illuminato

Calcolare la temperatura superfiiale di un satellite in orbita attorno alla terra

✍**Soluzione**: Il sole irraggia una potenza $P_S = S_S \cdot \sigma T_S^4 = 4\pi R_S^2 \sigma T_S^4$ dove $T_S = 5800\,\mathrm{K}$ e $R_S = 7\ 10^8\,\mathrm{m}$. Un oggetto vicino alla terra (a distanza $d \approx 1.5\ 10^{11}\,\mathrm{m}$ dal sole) riceve una frazione $\Omega/4\pi = \pi R^2/4\pi d^2 = 6.8\ 10^{-5} = 1/14500$, uguale all'angolo solido che misura quanto è visto grande il sole. Alla distanza d la potenza per unità di area (ortogonale al sole) è $P_S/4\pi d^2 = \Omega\sigma T_S^4/\pi$. Un oggetto sferico di raggio r con assorbitività ϵ assorbe quindi una potenza $\pi r^2 \cdot P_S/4\pi d^2 = r^2\Omega\sigma T_S^4 \epsilon \approx 4\epsilon\mathrm{kW}/\,\mathrm{m}^2$.

All'equilibrio l'oggetto ha una temperatura T tale che la potenza irraggiata, $4\pi r^2\sigma T^4\epsilon$ (emittività ed assorbitività sono uguali) sia uguale a quella ricevuta dal sole. Quindi $T = T_S(\Omega/4\pi)^{1/4} = 280\,\mathrm{K}$. Più o meno questa è la temperatura della terra.

Esercizio 123: Compressione di un gas

Un recipiente di sezione $S = (10\,\mathrm{cm})^2$ è chiuso da un pistone di massa trascurabile scorrevole con attrito trascurabile contiene 0.4 moli di aria (cioè in pratica di azoto biatomico) a temperatura ambiente $T_1 = 300\,\mathrm{K}$. Si calcoli il volume V_1 del gas. Sul pistone viene appoggiata una massa $m = 10\,\mathrm{kg}$. Si calcoli il volume V_2 del gas. Si isola il sistema e si riscalda il gas fino a farlo tornare al volume iniziale. Calcolare la quantità di calore necessaria.

✍**Soluzione**:

1. Si ha $p_1 = 10^5\,\mathrm{Pa}$, quindi $V_1 = nRT_1/p_1 = 0.01\,\mathrm{m}^3$. Quindi l'altezza del pistone è $h = V_1/S = 1\,\mathrm{m}$.

2. Aggiungendo il peso, la pressione diventa $p_2 = p_1 + p_m = p_2 + mg/S = 1.1p_1$ (cioè l'aria pesa $p_1/S = 100\,\mathrm{kg}$). Siccome $p_{\rm ext} \neq p_{\rm gas}$, il gas esegue una trasformazione irreversibile. Il problema è sapere quale.

- Se il gas è mantenuto a T costante (isoterma) allora pV rimane costante e $V_2 = V_1/1.1 = 0.91V_1$. Cioè il pistone scende di $\Delta z = 0.09\,\mathrm{m}$.
- Se il gas non ha tempo di scambiare calore, si tratta di una adiabatica. Il risultato cambia a seconda che sia reversibile o irreversibile.

  Se fosse reversibile pV^γ rimane costante. Per un gas biatomico, come è l'azoto che domina l'aria, $\gamma = 7/5$. Quindi $V_2 = V_1/1.1^{1/\gamma} = 0.934V_1$. In questo caso $T_2/T_1 = p_2V_2/p_1V_1 = 1.0276 = 308.3/T_1$. Come giusto $V_{\rm adiabatica} > V_{\rm isoterma}$ in quanto l'adiabatica ha anche un aumento di temperatura.

  Se è irreversibile l'incremento di temperatura è comunque uguale al lavoro $\mathcal{L} = p_2\Delta V = nC_V\Delta T$ (lo stesso problema nella domanda 1 del 31/5/96).

  $$\left\{\begin{array}{l} nC_V(T_2-T_1) = -(V_2-V_1)p_2 \\ p_2V_2 = nRT_2 \end{array}\right. \qquad : \qquad \left\{\begin{array}{l} V_2/V_1 = (1+nC_VT_1/p_2V_1)/(1+C_V/R) = 0.935, \\ T_2/T_1 = (1+p_1V_1/nC_VT_1)/(1+R/C_V) = 1.286 \end{array}\right.$$

  È venuto $T_{\rm irr} > T_{\rm rev}$ come dovevamo aspettarci: per le adiabatiche $\Delta U = \mathcal{L}$ e $\mathcal{L}_{\rm rev} = \int p\ dV < \int p_{\rm ext} dV = \mathcal{L}_{\rm irr}$.
- Più probabilmente il sistema esegue prima una adiabatica irreversibile (e si riscalda), dopodichè termalizza riducendo ancora il volume.

3. Supponiamo che si sia trattata di una isoterma. Calcoliamo quanto calore occorre fornire in modo tale da effettuare una isocora tale che $V_3 = V_1 = 1.1V_2$. Usando l'equazione dei gas perfetti ricavo $T_3 = p_3V_3/nR = p_1V_1/nR = 1.1T_1 = 330\,\mathrm{K}$. Quindi, ricordando che per un gas biatomico $C_p = \frac{7}{2}R$, la quantità di calore scambiata vale

   $$Q = nC_p\Delta T = 0.1nC_pT_1 = 83.45\ \mathrm{cal} = 349.2\,\mathrm{J} = \frac{7}{2}100\,\mathrm{J}$$

   (avrei anche potuto esprimere Q in funzione di ΔV). Il bilancio energetico torna: $\mathcal{L}_m = p_m\Delta V = mg\Delta z = 9\,\mathrm{J}$ vengono spesi per alzare la massa; $\mathcal{L}_{\rm aria} = p_{\rm aria}\Delta V = 90\,\mathrm{J}$ per innalzare l'aria. I restanti $\Delta U = nC_V\Delta T = \frac{5}{2}100\,\mathrm{J}$ vengono usati per riscaldare il gas. Quindi gran parte del calore viene sprecato per innalzare l'aria e per scaldare il gas; solo una piccola parte viene usata come 'ascensore'.

Esercizio 124: Oscillazioni di un pistone adiabatico

Si calcoli la forza di richiamo sentita da un pistone adiabatico

✍**Soluzione**: La forza di richiamo sentita da un pistone adiabatico di massa m, secondo $pV^\gamma = \mathrm{Cte}$ è $F(z) = F(z_0)(z_0/z)^\gamma$ (ed è conservativa). All'equilibrio $F(z_0) = mg$ (se non c'è pressione atmosferica). per piccoli spostamenti $z = z_0 + \delta$ la forza di richiamo vale $F(z) - F(z_0) = -k\delta$, con $k = F(z_0)\gamma/z_0$. Quindi il pistone oscilla con frequenza $\omega^2 = g\gamma/z_0$, dove $z_0 = S/V$. Se c'è la pressione atmosferica l'oscillazione è molto più veloce (per valori 'tipici' $mgS \ll p_{\rm atm}$) e dipende da m.

Con una molla opportuna dentro al gas, il pistone fa piccoli spostamenti liberi.

Esercizio 125: Trasformazioni di un gas coperto da acqua

Un cilindro dal volume $V_{\rm tot} = 2\,\mathrm{m}^3$ è separato in due parti da un pistone mobile con massa, volume e attrito trascurabili. La parte inferiore è riempita da $n = 10$ molti di un gas perfetto biatomico in contatto termico con una sorgente termica a temperatura $T = 300\,\mathrm{K}$.

(1) Quanta acqua è possibile versare reversibilmente fino a riempire completamente la parte superiore del cilindro? Quanto vale ΔS?

(2) Il bagno termico viene rimosso. Quale quantità di calore occorre fornire al gas per rovesciare via l'acqua?

(3) Il bagno termico viene rimesso. Quanto calore occorre fornire al gas, affinchè il pistone si alzi fino a rovesciare tutta l'acqua?

✍**Soluzione**:

(1) Alla fine $p_2 = p_{\rm atm} + \rho(V_{\rm tot} - V_2)g/S = p_t - V_2\cdot\rho g/S$ e $p_2V_2 = nRT$. Risolvendo una equazione di secondo grado trovo $V_2 = (p_tS/2\rho g)(1 \pm \sqrt{1 - 4nRT\rho g/Sp_t})$. $\Delta S = S(2) - S(1)$.

(2) La trasformazione seguita $T(V)$ è $(p_t - \mathrm{cte}V)V = nRT$. (Occorre assumere che il pistone si alzi sempre, cosa non sicura. Una trasformazione simile, ma con $p = p_t + \mathrm{cte}V$ si trova nel compito del 6/6/1999.)

$$Q = \int \delta Q = \int p\ dV + nC_V dT = p_t \Delta V - \frac{\Delta(V^2)}{2}\frac{\rho g}{S} + nC_V \Delta T$$

Mostrare anche il calcolo di C. L'equazione di stato fornisce la T finale.

Esercizio 126: Due gas separati da pistone

Un cilindro è diviso da un pistone mobile (con massa e attrito trascurabili) in due sezioni A e B isolate termicamente. Inizialmente le due sezioni hanno ugual volume V_0 e contengono $n = 6$ moli di gas perfetto monoatomico a temperatura $T_0 = 300\,\mathrm{K}$. Il gas in A viene lentamente riscaldato fino a che la pressione in B vale $p_B = 2p_0$. Calcolare (1) la temperatura finale T_B (2) il lavoro compiuto sul gas B (3) la temperatura finale T_A (4) la quantità di calore immessa nel gas A.

✍**Soluzione**:

1. Il gas B subisce una compressione adiabatica reversibile: quindi la temperatura finale è calcolabile in quanto $p^{1-\gamma}T^{\gamma}$ rimane costante: $T_B = T_0(p_B/p_0)^{(1-\gamma)/\gamma} = T_0 \cdot 2^{2/5} = 1.32\ T_0 = 396\,\mathrm{K}$.
2. Per una adiabatica il lavoro eseguito è $\mathcal{L}_B = -\Delta U = -nC_V \Delta T = -2391\,\mathrm{J}$.
3. La parte sinistra ha $p_A = p_B$ e $V_A = 2V_0 - V_B = 2V_0 - nRT_B/p_B$, quindi la sua temperatura è $T_A = p_A V_A/nR = 2p_0(2V_0 - nRT_B/2p_0) = 4T_0 - T_B = 2.68T_0 = 804\,\mathrm{K}$.
4. $Q = \mathcal{L}_A + \Delta U_A = -\mathcal{L}_B + nC_V(T_A - T_0) = (2391 + 12574)\,\mathrm{J} = 14965\,\mathrm{J}$.

Esercizio 127: Trasformazione con C = costante

Si trovi la trasformazione di un gas perfetto lungo la quale il calore molare vale $C = aC_V$.

✍**Soluzione**: Imponendo $\delta Q/dT = nC_V + pdV/dT = naC_V$ si trova

$$\frac{R}{C_V}\frac{dV}{V} = (a-1)\frac{dT}{T} \qquad : \qquad V^{\gamma-1}T^{1-a} = \mathrm{cte} \qquad \text{cioè} \qquad V^{\gamma-a}p^{1-a} = \mathrm{cte}$$

avendo usato $R/C_V = \gamma - 1$. Per $a = 0$ si ritrova l'adiabatica, per $a = 1$ l'isocora, per $a = \gamma$ l'isobara e per $a \to \infty$ l'isoterma. Per $a < 0$ cedendo calore diminuisce la temperatura. Nel piano (p, V) queste trasformazioni stanno fra isoterma ed adiabatica.

Capitolo 18

Entropia

Esercizio 128: Trasformazione con $C = C_V + aT$

Si trovi la trasformazione di un gas perfetto lungo la quale il calore molare vale $C = C_V + aT$.

Soluzione: Per presentare l'entropia è utile fare un semplice calcolo dove si maneggiano differenziali.

In generale $\delta Q = nC_V\ dT + p\ dV$. Si ha $\delta Q = n(C_V + aT)\ dT$ se $p\ dV = naT\ dT$. Conviene eliminare p ottenendo $dV/V = (a/R)dT$ cioè $V \propto e^{aT/R}$.

È utile notare che il termine $p\ dV$ in δQ non è integrabile (ad es. se elimino $p \to nRT/V$ compare T). Al contrario $dS \equiv \delta Q/T = nC_V\ dT/T + p\ dV/T = nC_V\ dT + nR\ dV/V$ è integrabile. **Quindi S è una funzione di stato** che vale $S = nC_V \ln T + nR \ln V$.

Per verifcarlo calcoliamo ΔS da $(p, V) = (p_A, V_A)$ a $(p', V') = (p_D, V_D)$ eseguendo

(a) un'isobara AB $V_A \to V_B = V_D$ seguita da un'isocora BD $p_B = p_A \to p_D$.

(b) un'isocora AC $p_A \to p_C = p_D$ seguita da un'isobara CD $V_C = V_A \to V_D$

Ricordando che $\delta Q = nC_V dT$ per un isocora e $\delta Q = nC_p\ dT$ per un isobara, si ha

$$\Delta S_{ABD} = nC_p \ln \frac{T_B}{T_A} + nC_V \ln \frac{T_D}{T_B}, \qquad \Delta S_{ACD} = nC_V \ln \frac{T_C}{T_A} + nC_p \ln \frac{T_D}{T_C}$$

Usando le equazioni dei gas perfetti ho $T_b/T_A = V_B/V_A = V'/V = T_D/T_C$, $T_D/T_B = p'/p = T_C/T_A$

$$\Delta S_{ABD} = nC_p \ln \frac{V'}{V} + nC_V \ln \frac{p'}{p}, \qquad \Delta S_{ACD} = nC_V \ln \frac{p'}{p} + nC_p \ln \frac{V'}{V}$$

e quindi sono uguali.

Esercizio 129: Entropia

Una sostanza non specificata svolge un ciclo reversibile isocora/isobara/isocora/isobara. Sono noti i calori molari C_p e C_V e le temperature a tre dei 'vertici'. Calcolare (1) La quarta temperatura T_4 (2) Il lavoro prodotto.

Soluzione: (1) Impongo $\Delta S = 0 = C_V \ln \frac{T_1}{T_2} + C_p \ln \frac{T_2}{T_3} + C_V \ln \frac{T_3}{T_4} + C_p \ln \frac{T_4}{T_1}$. (2) $\mathcal{L} = Q = C_V(T_2 - T_1) + C_p(T_3 - T_2) + C_V(T_4 - T_3) + C_p(T_1 - T_4)$.

Esercizio 130: Entropia

Una sostanza non specificata svolge un ciclo reversibile composto da (a) Isoterma a temperatura T_1 (b) isocora fino a temperatura T_2, lungo la quale il calore molare è costante e vale C (c) adiabatica. Trovare il lavoro fatto.

Soluzione: $\mathcal{L} = Q_a + Q_b + 0$. Per la isocora $Q_b = \Delta U = C(T_2 - T_1)$. Per trovare Q_a impongo $\Delta S = 0 = Q_a/T_1 + C \ln \frac{T_2}{T_1}$.

Esercizio 131: Entropia

Un sistema generico, caratterizzato da p, V, T, svolge il seguente ciclo reversibile:

1. trasformazione reversibile a p costante, tra T_0 e T_1
2. trasformazione reversibile a V costante, tra T_0 e T_2
3. trasformazione adiabatica reversibile che chiude il ciclo

Supponendo che le capacità termiche lungo (1) e (2) siano costanti (e pari a C_p e C_V), mostrare che la relazione che tra T_2 e T_0 è quella che ci sarebbe se il sistema fosse un gas perfetto.

✍**Soluzione**: $T_2 = T_0 * (T_0/T_1)^{\gamma-1}$ dove $\gamma = C_P/C_V$ (non è un gas perfetto, in generale, perchè $\gamma \neq (n+1)/2$, ma la relazione e' questa, con il γ dato dai C_P e C_V propri del sistema).

Esercizio 132: Isoterma per un gas di Van der Waals

Calcolare U ed S per un gas di van der Walls, con equazione di stato $(p + \frac{n^2 a}{V^2})(V - nb) = nRT$. Si calcoli il lavoro fatto durante una isoterma reversibile di idrogeno, con $a = 0.25$ atm l^2 e $b = 0.0266$ l

✍**Soluzione**:

1. Scrivendo $dU = dT\ U_T + dV\ U_V$ ed imponendo che $dS = \delta Q/T$ sia un differenziale si trova $U_V = T p_T - p$. Nel nostro caso $p_T \equiv (\partial p/\partial T)_V = nR/V$ da cui $U_V = n^2 a/(V - nb)^2$. Siccome C_V è costante, segue $\boxed{U(V,T) = nC_V T - n^2 a/(V - nb)}$.
2. A questo punto ho tutto il necessario per scrivere dS per un gas di Van der Waals:
$$dS = \delta Q/T = (p + n^2 a/(V - nb)^2) dV/T + C_V\ dT/T = nR\ dV/(V - nb) + nC_V\ dT/T$$
'Integrando' si ottiene $\boxed{S = nR \ln(V - nb) + nC_V \ln T}$.
3. La pressione iniziale vale $p_1 = \frac{nRT}{V_1 - nb} - \frac{n^2 a}{V_1^2} = (124876 - 62)/Pa \sim 10^5\,\mathrm{Pa}$. Il termine nb è $10^{-3} V_1$. Il lavoro è
$$\mathcal{L} = \int p\ dV = \int (\frac{nRT}{V - nb} - \frac{n^2 a}{V^2}) dV = nRT \ln \frac{V_2 - nb}{V_1 - nb} + n^2 a (V_2^{-1} - V_1^{-1})$$
Se $n = 1$ $T = 300\,\mathrm{K}$ e $V_2 = 2V_1 = 30\mathrm{l}$ ottengo $\mathcal{L} = 1730\,\mathrm{J} - 0.0062\mathrm{atm\ l} = (1730 - 100\ 0.0062)\,\mathrm{J} = 1729.9\,\mathrm{J}$. I termini a e b danno correzioni comparabili a $\mathcal{L}$.

Esercizio 133: Gas relativistico ed espansione dell'universo

Un gas a temperatura ultrarelativistica (composto di particelle la cui energia media è molto maggiore del loro mc^2) ha equazione di stato $p = \frac{1}{3}\alpha T^4$ e capacità termica a volume costante $C_V = 4\alpha V T^3$ dove α è una costante nota. Si calcolino l'energia interna U e l'entropia S di questo gas.

L'universo primordiale può essere approssimato come un gas ultrarelativistico immerso in un recipiente adiabatico il cui volume si espande. Se $V \to 2V$ trovare di quanto varia l'energia e la temperatura.

✍**Soluzione**:

1. In generale $dU = U_T dT + U_V dV$. Conosco $U_T = C_V$. Imporre che le derivate in croce siano uguali implica che $U_V = \alpha T^4 + f(V)$. Siccome f è arbitraria questo tentativo è inutile.

   Posso calcolare U_V in quanto l'entropia è una funzione di stato solo se $U_V = T p_T - p = (\frac{4}{3} - \frac{1}{3})\alpha T^4 = \alpha T^4$. Si ottiene quindi $\boxed{U(T,V) = \alpha V T^4}$.

2. A questo punto ho tutto il necessario per scrivere dS per un gas ultrarelativistico

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{U_T dT + (U_V + p)dV}{T} = C_V \frac{dT}{T} + T p_T \frac{dV}{T} = 4\alpha V T^2 \, dT + \frac{4}{3}\alpha T^3 \, dV = d\frac{4}{3} V T^3$$

   cioè $\boxed{S(T,V) = \frac{4}{3} V T^3}$.

3. Siccome S è costante l'universo si espande raffreddandosi $T \propto V^{-1/3} \propto 1/R$. Si ha $U \propto T$.

   La massima temperatura alla quale la fisica nota funziona è $T = T_{\rm Pl} = E_{\rm Pl}/k_B = 1.4\ 10^{32}\,{\rm K}$ ($E_{\rm Pl} = M_{\rm Pl} c^2$ con $M_{\rm Pl}^2 = \hbar c/G$), cioè circa 10^{32} volte maggiore della temperatura attuale. Quindi era circa 10^{32} volte più piccolo: tuttavia un raggio di $10^{10}\,{\rm ly}c/10^{32} \approx 0.01\,{\rm mm}$ è 'enorme': circa 10^{40} volte più grande della distanza minima alla quale la fisica nota funziona $R_{\rm Pl} = \hbar/M_{\rm Pl}c$. Quindi la cosmologia del 'BigBang' non spiega tutto.

Esercizio 134: Espansione adiabatica reversibile e non

Un gas (perfetto, di Van der Waals, relativistico), partendo da uno stato noto T_1, V_1, p_1 si espande adiabaticamente fino al volume V_2 (a) in modo reversibile (b) in modo irreversibile nel vuoto, perchè il contenitore si rompe. Calcolare T_2.

✍**Soluzione**: Seguire la trasformazione può essere noioso per un gas non perfetto. Nel caso (a) conviene usare il fatto che l'entropia è costante lungo un'adiabatica reversibile: quindi T_2 si ottiene risolvendo $S(T_1, V_1) = S(T_2, V_2)$.

Nel caso (b) l'entropia non è costante (aumenta: quindi T_2 è maggiore che nel caso precedente). Siccome $\delta Q = 0$ (adiabatica) e $\delta\mathcal{L} = 0$ (perchè $p_{\rm ext} = 0$), è possibile calcolare T_2 sfruttando il fatto che l'energia interna è costante.

Esercizio 135: Compitino del 31/5/97: termodinamica

Un recipiente cilindrico, contenente $n = 5$ moli di gas, è chiuso da un pistone di massa trascurabile che può scorrere lungo l'asse. Sul pistone agisce la pressione atmosferica $p_{\rm atm} = 1.01\ 10^5\,{\rm Pa}$. Il sistema è mantenuto in contatto termico con una sorgente termica ideale. Nello stato di equilibrio iniziale, il pistone è bloccato ed il gas occupa un volume $V_1 = 0.18\,{\rm m}^3$. Il gas sia considerato perfetto e si trascuri l'attrito tra pistone e recipiente. Si assuma $R = 8.31\,{\rm J/(mole\,K)}$. Il pistone viene sbloccato e, nello stato di equilibrio finale, il volume del gas è $V_2 = 0.29\,{\rm m}^3$. Si determinino

1. La quantità di calore che il gas ha scambiato con la sorgente (si assuma il segno positivo se acquistato dal gas).

2. La variazione di entropia del gas

Il sistema, sempre in contatto termico con la sorgente, è riportato reversibilmente nello stato iniziale. Si determini

1. La quantità di calore scambiata dal gas con la sorgente nella seconda trasformazione

2. La variazione di entropia subita dalla sorgente complessivamente nelle due trasformazioni

✍**Soluzione**:

1. Siccome la pressione del gas è diversa dalla pressione esterna $p_{\rm ext} = p_{\rm atm}$ la trasformazione non è reversibile e $Q = \Delta U + \mathcal{L}$ con $\Delta U = 0$ (perchè $T_2 = T_1$) e $\mathcal{L} = p_{\rm ext}\Delta V = 11100\,{\rm J}$.

   Per una trasformazione reversibile si avrebbe invece avuto $Q_{\rm rev} = \mathcal{L} = \int p_{\rm gas} dV = nRT \ln(V_2/V_1) = 13970\,{\rm J}$.

2. Dalla definizione di entropia, usando il fatto che T è costante e vale $T = T_2 = p_2V_2/nR = 705\,\mathrm{K}$, si ha $\Delta S = \Delta Q_{\mathrm{rev}}/T = 19.8$.

   Siccome l'entropia è una funzione di stato (vale $S = nR\ln VT^{1/(\gamma-1)}$) avremmo potuto calcolarla anche come $\Delta S = S(2) - S(1) = nR\ln V_2/V_1$ (valida per un isoterma).

3. La seconda trasformazione $2 \to 3 = 1$ è un'isoterma reversibile: come abbiamo già visto $Q = \mathcal{L} = nRT\ln(V_3/V_2) = -13970\,\mathrm{J}$.

4. Come sappiamo $\Delta S > 0$ e vale $\Delta S = (-Q_{\mathrm{irr}} + Q_{\mathrm{rev}})/T = 4.06\,\mathrm{J/K}$.

Esercizio 136: Ciclo alla Carnot con isoterme irreversibili

Nel piano (T, S) è un rettangolo: non do tempo al gas di cambiare p, V durante le isoterme. Calcolare il rendimento.

✍**Soluzione**: Il ciclo reversibile ha le due isoterme che non sono verticali.

Esercizio 137: Una trasformazione irreversibile

Un cilindro contiene un gas perfetto noto, mantenuto a temperatura T da una sorgente. Al pistone di massa M è attaccato un filo al quale è appesa (tramite una carrucola) una massa m ad altezza h sopra il pistone. Taglio il filo. Trovare lo stato finale e calcolare ΔS_{gas} e ΔS_{sorg}.

✍**Soluzione**: All'inizio $p_1 = (M - m)g/S$; alla fine $p_2 = (M + m)g/S$. $\Delta S_{\mathrm{gas}} = nR\ln p_0/p_1$, $\Delta S_{\mathrm{sorg}} = Q/T$ dove $Q = \mathcal{L} = \Delta U_{\mathrm{meccanico}} = Mg\Delta Z + mg\Delta z$.

Esercizio 138: Compitino del 31/5/96: termodinamica

Si consideri un cilindro, riempito da $n = 1.9$ moli di un gas perfetto monoatomico, chiuso da un pistone di massa $m = 2.9\,\mathrm{kg}$ e superficie $S = 1\,\mathrm{m}^2$ a temperatura $T_0 = 300\,\mathrm{K}$. Sopra il pistone è posto un grave di massa $2m$: si assuma che sopra il pistone ci sia il vuoto, che l'accelerazione gravitazionale valga $g = 10\,\mathrm{m/s}^2$ e la costante dei gas perfetti $R = 8.31\,\mathrm{J/K/mole}$. Dopo aver isolato termicamente il sistema si rimuove il grave

1. Quale e'il volume raggiunto dal gas e la sua variazione di entropia?

Il pistone viene bloccato nella posizione raggiunta e il gas messo in contatto con una sorgente termica ideale ad una temperatura $T_?$ incognita (trasformazione isocora). Raggiunto l'equilibrio si isola nuovamente il gas e, mediante una trasformazione adiabatica reversibile, si riporta al volume iniziale

2. Quale è la temperatura incognita $T_?$ della sorgente termica?
3. Quanto è il calore ceduto dal gas, e le variazioni di entropia di gas e sorgente nella trasformazione isocora?
4. Qunto è il lavoro fatto sul gas e la variazione di entropia di gas più sorgente durante l'intera trasformazione?

✍**Soluzione**: Per un gas monoatomico $C_V = \frac{3}{2}R$. La pressione iniziale vale $p_0 = (m + 2m)g/S = 87\,\mathrm{Pa}$, quindi $V_0 = nRT_0/p_0 = 54.4\,\mathrm{m}^2$.

1. Dopo aver rimosso il grave la pressione vale $p_1 = p_{\mathrm{ext}} = p_0/3$. Siccome $p_{\mathrm{gas}} \neq p_{\mathrm{ext}}$ la trasformazione è irreversibile (adiabatica). Per trovare V_1 e T_1 imponiamo che $\Delta Q = 0$ cioè $\Delta U = \mathcal{L}$, cioè $nC_V\Delta T = p_{\mathrm{ext}}\Delta V$. Abbiamo quindi il sistema in V_1 e T_1:

$$\left\{\begin{array}{l} nC_V(T_1 - T_0) = -(V_1 - V_0)p_1 \\ p_1V_1 = nRT_1 \end{array}\right. \quad : \quad \left\{\begin{array}{l} V_1 = \frac{2}{5}V_0 + \frac{3nR}{5}\frac{T_0}{p_1} = 120\,\mathrm{m}^3, \\ T_1 = \frac{3}{5}T_0 + \frac{2p_1V_0}{5nR} = 220\,\mathrm{K} \end{array}\right.$$

   (Attenzione al $-$: il volume aumenta e la temperatura cala). Siccome l'entropia è una funzione di stato che vale $S = nC_V\ln TV^{\gamma-1}$ (qui $\gamma = 5/3$), $\Delta S = S(1) - S(0) = (203.3 - 198.2)\,\mathrm{J/K} = 5.10\,\mathrm{J/K}$.

2. Dopo il contatto termico $(T_2, V_2) = (T_?, V_1)$. Dopo la adiabatica reversibile $(T_3, V_3) = (T_0, V_0)$ (nulla dice che $T_3 = T_0$, o che $p_3 = p_0$. Senza qualche informazione il problema non ha abbastanza dati.). Siccome la trasformazione è adiabatica $T_? V_1^{\gamma-1} = T_0 V_0^{\gamma-1}$ da cui $T_? = T_0(V_0/V_1)^{\gamma-1} = 177.35\,\mathrm{K}$.

3. Il calore ceduto dal gas durante l'isocora è $-\Delta Q_{\mathrm{gas}} = -\Delta U = -nC_V(T_? - T_1) = +1010\,\mathrm{J}$. La variazione di entropia del gas è $\Delta S_{\mathrm{gas}} = S(2) - S(1) = nC_V \ln T_?/T_1 = -5.10\,\mathrm{J/\,K}$. La variazione di entropia della sorgente è $\Delta S_{\mathrm{sorg}} = \Delta Q_{\mathrm{sorg}}/T_{\mathrm{sorg}} = -\Delta Q_{\mathrm{gas}}/T_? = 5.695\,\mathrm{J/\,K}$.

4. Siccome l'intera trasformazione è un ciclo $\Delta U = 0$ e quindi $\mathcal{L} = \sum \Delta Q = \Delta Q_{\mathrm{isocora}} = 1010\,\mathrm{J}$ (solo durante l'isocora è stato scambiato calore). Alternativamente $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathrm{ad\ irrev}} + \mathcal{L}_{\mathrm{ad\ rev}} = -p_{\mathrm{ext}}\Delta V + nC_V\Delta T = (-1895 + 2905)\,\mathrm{J} = 1010\,\mathrm{J}$.

5. $\Delta S = \Delta S_{\mathrm{gas}} + \Delta S_{\mathrm{sorg}} = \Delta S_{\mathrm{sorg}}$ in quanto $\Delta S_{\mathrm{gas}} = 0$: il gas ha subito una trasformazione ciclica. Per la sorgente $\Delta S_{\mathrm{sorg}} = \sum \Delta S^i_{\mathrm{sorg}} = 0 + \Delta S^{\mathrm{isocora}}_{\mathrm{sorg}} + 0 = 5.69\,\mathrm{J}$ (dalla domanda 3.).

Esercizio 139: Compitino del 5/4/95: termodinamica

Un recipiente cilindrico verticale, chiuso da un pistone di massa trascurabile e sezione $S = 10\,\mathrm{cm}^2$ contiene $n = 1$ moli di gas perfetto. La pressione del gas esterna al pistone vale $p_{\mathrm{ext}} = 10^5\,\mathrm{Pa}$. Il gas è in grado di scambiare calore con una sorgente di capacità termica infinita a temperatura $T_1 = -1.5^\circ_{\mathrm{C}} = 366.6\,\mathrm{K}$. Sul pistone viene appoggiato un corpo di massa $m = 48\,\mathrm{kg}$, che ne causa il movimento, con attrito trascurabile. Sia assuma che l'intensità del campo gravitazionale sia $g = 10\,\mathrm{m/\,s^2}$. Il pistone, il gas, la massa e la sorgente termica sono globalmente termicamente isolati. Si assuma $R = 8.31\,\mathrm{J/\,K/mole}$. Si calcolino

1. Il volume finale raggiunto dal gas;

2. Il calore scambiato durante la trasformazione;

3. La variazione di entropia del gas;

4. La variazione di entropia globale del sistema.

Il corpo viene poi, un pezzetto alla volta, rimosso completamente, in modo da garantire che la trasformaizone sia una espansione isoterma reversibile

5. Di quanto è variata l'entropia della sorgente termica nell'intero processo?

✍**Soluzione**:

1. All'inizio $T_0 = T_S$, $p_0 = p_{\mathrm{gas\ ext}}$. Dopo aver aggiunto il peso $T_1 = T_S$, $p_1 = p_{\mathrm{gas\ ext}} + mg/S = 5.8p_0$, quindi $V_1 = V_0/5.8 = 0.003892\,\mathrm{m}^3$.

2. La trasformazione è una isoterma irreversibile. Quindi $\Delta Q_{\mathrm{gas}} = \mathcal{L} = \int p_{\mathrm{ext}} dV = p_{\mathrm{ext}}\Delta V = -10835\,\mathrm{J}$. Una isoterma reversibile avrebbe dato $\Delta Q = nRT \ln V_1/V_0 = -3968\,\mathrm{J}$.

3. $\Delta S_{\mathrm{gas}} = S(1) - S(0) = nR \ln V_1/V_0 = -14.6\ \mathrm{J/\,K}$.

4. $\Delta S_{\mathrm{tot}} = \Delta S_{\mathrm{gas}} + \Delta S_{\mathrm{sorg}} = nR \ln \frac{V_1}{V_0} + \frac{\Delta Q_{\mathrm{sorg}}}{T_S} = (-14.6 + 39.9)\,\mathrm{J/\,K} = 25.28\,\mathrm{J/\,K}$. Abbiamo usato $\Delta Q_{\mathrm{sorg}} = -\Delta Q_{\mathrm{gas}}$.

5. L'ultima trasformazione, essendo reversibile dà $\Delta S_{\mathrm{gas}} = -\Delta S_{\mathrm{sorg}}(= nR \ln V_0/V_1)$. Quindi $\Delta S_{\mathrm{sorg}} = (39.9 - 14.6)\,\mathrm{J/\,K} = 25.28\,\mathrm{J/\,K}$. Il motivo per il quale la risposta a questa domanda è uguale alla riposta alla domanda precedente è il seguente. Siccome il processo è un ciclo, il ΔS_{gas} globale del gas è zero. Quindi $\Delta S_{\mathrm{sorg}} = \Delta S_{\mathrm{tot}} = \Delta S_{\mathrm{tot}}(\text{prima trasf}) =$ domanda precedente.

Esercizio 140: Rendimento di una macchina termica

Calcolare la massima efficienza di una macchina termica che lavora con due sorgenti a temperature $T_2 > T_1$ prelevando calore $Q_2 > 0$ dalla sorgente calda e cedendo calore $Q_1 < 0$ alla sorgente fredda. Ripetere il ragionamento per una macchina frigorifera.

✍**Soluzione**: Per il primo principio della termodinamica il lavoro prodotto è $L = Q_1 + Q_2$. Per il secondo principio

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_{\text{ciclo}} = -\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} + 0 \geq 0$$

Eliminando Q_1 si ottiene $\eta \equiv L/Q_2 \leq 1 - T_1/T_2$. η è la frazione di calore preso che la macchina riesce a trasformare in lavoro. Il rendimento massimo lo si ottiene con il ciclo di Carnot, che è l'unico ciclo reversibile fra due sorgenti.

È come usare l'energia di una cascata da $z_1 \to z_2$ per portare l'acqua della cascata in una casa situata in alto ad una quota $z = 0$. La massima frazione η di acqua che si riesce a portare è data da $(z_2 - z_1)(1 - \eta) = \eta z_1$ cioè $\eta = 1 - z_1/z_2$.

• • • • • • • • • • • • • • • • • •

Se le sorgenti hanno temperatura iniziale $T_2 > T_1$ ma capacità termica $C_i = C$ finita, alla fine entrambi le sorgenti raggiungeranno una temperatura finale T_f e non sarà più possibile ottenere lavoro. Il lavoro massimo ottenibile è $L = Q_1 + Q_2 = C(T_2 - T_f) + C(T_1 - T_f)$. Il secondo principio dice quanto vale T_F:

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_{\text{ciclo}} = C \ln \frac{T_F}{T_1} + C \ln T_F T_2 + 0 \geq 0$$

Quindi $T_F \geq \sqrt{T_1 T_2}$ e $L \leq (T_1 + T_2 - 2\sqrt{T_1 T_2})$. Il rendimento massimo si ha compiendo cicli di Carnot con isoterme infinitesime (in modo che la variazione di temperatura delle sorgenti sia trascurabile ad ogni ciclo).

• • • • • • • • • • • • • • • • • •

Per una macchina frigorifera, che usa $L = Q_1 + Q_2 < 0$ per cedere calore $Q_2 < 0$ alla sorgente calda prelevando calore $Q_1 > 0$ da una sorgente fredda, eliminando Q_2 si ottiene $|L| \geq Q_1(T_2/T_1 - 1)$. Il rendimento $\eta \equiv |L/Q_1|$ è la frazione di energia esterna L che la macchina riesce a trasformare in calore sottratto alla sorgente fredda. Notare che $\eta \to \infty$ quando $T_2 \to T_1$. Siccome $Q_1/Q_2 = -T_1/T_2$ basta poco lavoro per spostare calore fra due sorgenti a temperatura quasi uguale. L'efficienza si riduce quando si vuole raffreddare una sorgente già fredda.

• • • • • • • • • • • • • • • • • •

Supponiamo adesso che la sorgente 'fredda' abbia capacità termica C finita, e che la si voglia raffreddare da T_2 a T_1, dove T_2 è la temperatura della sorgente calda. Quale è il lavoro minimo necessario? Lo si può calcolare svolgendo un grande numero di cicli di Carnot reversibili con isoterma *infinitesima*. In ciascun ciclo la variazione di temperatura del gas che funge da sorgente fredda è trascurabile, quindi la formula standard per una macchina frigorifera dice che $\delta L = \delta Q_f(1 - T_2/T_f)$ dove $\delta Q_f = C\, dT_f$ e T_f è la temperatura della sorgente fredda, che si vuole raffreddare da T_2 a T_1. Il lavoro totale si ottiene integrando $L = \int_{T_2}^{T_1} \delta L$.

Si arriva allo stesso risultato in modo pìi semplice procedendo nel seguente modo. Chiamiamo $Q_2 < 0$ il calore ceduto dalla macchina alla sorgente calda. Il calore assorbito dalla macchina alla 'sorgente fredda' (cioè al gas) vale $Q_1 = C(T_2 - T_1) > 0$. Quindi il lavoro fatto dalla macchina vale $\mathcal{L} = Q_1 + Q_2 < 0$. Il lavoro minimo si ha quando

$$\Delta S = \Delta S_{\text{macchina}} + \Delta S_{\text{gas}} + \Delta S_{\text{sorg}} = 0 + C \ln \frac{T_1}{T_2} - \frac{\mathcal{L} - Q_1}{T_2} \geq 0$$

vale zero. Quindi $|\mathcal{L}| \geq C|(T_2 - T_1) + T_2 \ln(T_1/T_2)|$.

Esercizio 141: $p(z)$

In che modo la pressione dipende dalla quota?

✍**Soluzione**: Secondo la statica dei fluidi

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = -\frac{n\mu}{V} g = -\frac{\mu g}{RT} p \qquad : \qquad p(z) = p(0) e^{-z/\lambda} \propto e^{-E/kT}, \qquad \lambda = \frac{RT}{\mu g}, \qquad E = mgz$$

se la temperatura è costante. μ è il peso molare che per l'aria (composta per 4/5 da azoto e per il 1/5 da ossigeno) vale $1/\mu = (4/5)(1/28\,\mathrm{g}) + (1/5)(1/32\,\mathrm{g}) = 1/28.8\,\mathrm{g}$. Per l'aria , quindi $\lambda = 8.6\,\mathrm{km}$. In cima alla torre di Pisa ($\Delta z \approx 100\,\mathrm{m}$) la pressione si è ridotta al 98.8%, il che suggerisce *un* modo di misurarne l'altezza con un barometro.

In realtà la temperatura non è costante. Siccome l'aria è un buon isolante il contributo dominante allo scambio di calore è il moto verticale dell'aria: l'aria che sale si espande adiabaticamente raffreddandosi: $pT^{\gamma/(1-\gamma)} = \text{cte}$. Siccome $\gamma = 7/5$ $dT/T = (2/7) dp/p$ e $dT/dz = -10\,\mathrm{K/\,km}$.

Esercizio 142: $e^{-E/kT}$

✍**Soluzione**: Aprendo una buchettino in un contenitore escono le molecole più veloci: cioè le più 'calde' e le più leggere. In questo moto si sono separati gli isotopi dell'Uranio.

Esercizio 143: Due gas in contatto termico

Un recipiente è diviso in due sezioni A e B di volumi V_A e V_B dati che contengono n_A ed n_B molti di gas perfetto a temperature T_A e T_B. Il gas in A è monoatomico, quello in B bi-atomico. Calcolare (a) lo stato finale se $n_A = n_B = n = 1$ e $V_A = V_B = V = 0.03\,\mathrm{m}^3$, $T_A = 500\,\mathrm{K}$, $T_B = 300\,\mathrm{K}$. (b) la variazione di entropia. Raggiunto l'equilibrio si rimuove la separazione. Si calcoli l'aumento di entropia.

✍**Soluzione**: I due gas si scambieranno calore, ma l'energia totale rimarrà costante:

$$n_A C_{VA}(T_f - T_A) = n_B C_{VB}(T_f - T_B), \qquad : \qquad T_f = \frac{n_A C_{VA} T_A + n_B C_{VB} T_B}{n_A C_{VA} + n_B C_{VB}} = \frac{3T_A + 5T_B}{8} = 375\,\mathrm{K}$$

in quanto $C_{VA} = \frac{3}{2}R$ mentre $C_{BV} = \frac{5}{2}R$. Quindi $p_{fA} = p_{fB} = nRT_f/V = 1\,\mathrm{atm}$.

La variazione di entropia è

$$\Delta S_A + \Delta S_B = n_A C_{VA} \ln\frac{T_f}{T_A} + n_B C_{VB} \ln\frac{T_f}{T_B} = (-3.58 + 4.64)\,\mathrm{J/\,K} = 1.05\,\mathrm{J/\,K}$$

Se si rimuove la paratia la variazione di entropia è $(n_A + n_B)R\ln(2V/V) = 11.5\,\mathrm{J/\,K}$ (che si avrebbe anche se fossero due gas uguali, ma occorre tenere in conto l'entropia di mescolamento).

Esercizio 144: Collasso stellare

✍**Soluzione**: Una palla compressa dalla propria gravità (ad esempio il sole) è stabile se

$$r^2 p'(r) = -G\rho M_{\text{dentro}}(r), \qquad M_{\text{dentro}}(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr' \qquad \text{cioè se} \qquad \frac{dM_{\text{dentro}}}{dr} = 4\pi r^2 \rho$$

Per procedere devo sapere come p dipende da ρ. In generale nell'equazione di stato compare anche la temperatura; quindi devo sapere come il sole prende e cede calore (reazioni nucleari, emissione di luce) e come il calore si diffonde dentro il sole. Alla fine si descrive una stella mediante un sistema di 4 equazioni differenziali.

Studiamo invece il caso più semplice di una stella spenta ($T = 0$): cosa succede ad una stella quando ha esaurito il suo combustibile nucleare ed ha emesso tutto il calore che aveva? Affinchè sia stabile serve $F_{\text{pressure}} \sim pR^2 \geq F_{\text{gravity}} \sim GM^2/R$ cioè $p \approx GM^2/R^4$. Se l'equazione di stato ha la forma $p \propto \rho^\gamma \propto R^{-3\gamma}$ la stabilità è possibile solo se $\gamma \geq 4/3$.

- L'equazione di stato di particelle puntiformi libere $pV = nRT$ si può riscrivere come $p(V/nN_A) = (R/N_A)T$ cioè come $pv = kT \approx u$ dove v è il volume occupato da un singolo atomo ed $u \sim kT$ è la sua energia. Una stella contenente gas perfetto è stabile per $NkT \sim GM^2/R$ (questo è il teorema del viriale). Per un gas perfetto $p = 0$ se $T = 0$, quindi apparentemente una stella morta collassa.
- In realtà, anche a temperatura zero un gas di elettroni ha una pressione non zero. Il motivo é il principio di incertezza $\Delta x\, \Delta p_x \sim \hbar$ applicato a particelle di Fermi. Anche a $T = 0$ c'è un impulso minimo $p_F \sim \hbar v^{-1/3}$. Per elettroni non relativistici $u = E_F = p_F^2/2m \sim v^{-2/3}\hbar^2/m_e$ e la pressione di Fermi è
$$p \sim \frac{u}{v} \sim v^{-5/3}\frac{\hbar^2}{m_e} = K\rho^{5/3}, \qquad K \sim \frac{\hbar^2}{m_e m_N^{5/3}}, \qquad \rho \equiv \frac{m_n}{v}$$
Gli elettroni danno il contributo dominante alla pressione; i neutroni e protoni alla massa. Siccome $\gamma = 5/3 > 4/3$ la stella morta è stabile. Ad esempio se $M = M_{\rm sole} = 2\,10^{30}\,{\rm kg}$ e quindi $N = M/m_n \sim 10^{57}$ $R \approx KM^{-1/3}/G \approx 10000\,{\rm km}$ e $\rho \sim 10^{10}\,{\rm kg/\,m}^3$. Però viene anche $p_F \sim 0.6 m_e c$, cioè gli elettroni iniziano a diventare relativistici.
- Per stelle più pesanti del sole gli elettroni sono relativistici: $E_F \sim p_F \sim \hbar v^{-1/3}$. Quinidi la pressione di Fermi è $p \sim \hbar v^{-4/3} = K\rho^{4/3}$ with $K = \hbar/m_n^{4/3}$. Viene proprio $\gamma = 4/3$, cioè $p \propto 1/R^4$. Il raggio sparisce dalla condizione di stabilità ed si ottiene il limite di massa di Chandrasekhar $M_{\rm Ch} \sim (\hbar c/G)^{3/2}/m_n^2 \sim M_{\rm sun}$ (un calcolo dettagliato fornisce $M_{\rm Ch} = 1.2 M_{\rm sun}$, quindi il sole non diventerà una nana bianca).
- For a gas of relativistic neutrons the only change is that $\rho = E_F n$ instead of $\rho = m_n n$: one obtains the standard relativistic equation of state $p = \frac{1}{3}\rho$.

Esercizio 145: Rendimento

Due gas vengono usati come sorgenti. Uno può fare solo trasformazioni a pressione costante e $C = C_p$ e costante. L'altro può fare solo trasformazioni a volume costante e $C = C_V$ e costante. Trovare (a) la temperatura di termaliazzazione e (b) il massimo lavoro ottenibile usandoli come sorgenti termiche.

✍**Soluzione**: Nel piano p, V si incorciano in un punto. Lo stato finale in (b) non è l'incrocio.

Esercizio 146: Rendimento del ciclo Diesel

Calcolare, per un gas perfetto biatomico, il rendimento di un ciclo Diesel (adiabatiche AB e CD, isobara BC, isocora DA) per rapporto di compressione $V_A/V_B = r = 9$ e $T_D/T_C = 2$).

✍**Soluzione**: Per il primo principio della termodinamica $\mathcal{L} = Q_a - Q_c$ (a = assorbito, c = ceduto). Il rendimento è $\eta = \mathcal{L}/Q_a = 1 - |Q_c/Q_a|$. Nel nostro caso $Q_a = Q_{BC} = nC_p(T_C - T_B)$ mentre $Q_c = Q_{DA} = nC_V(T_A - T_D)$. Quindi
$$\eta = 1 - \frac{1}{\gamma}\frac{T_A}{T_B}\frac{|1 - T_D/T_A|}{T_C/T_B - 1}$$
occorre calcolare i rapporti fra le temperature. Per le due adiabatiche
$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1}, \qquad T_D V_D^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1}$$
Siccome AB è una adiabatica $T_A/T_B = (V_B/V_A)^{\gamma-1} = r^{1-\gamma}$. Ovviamente $T_B/T_C = V_B/V_C$. È possible esprimere anche T_D/T_A in funzione di V_B/V_C:
$$\frac{T_D}{T_A} = (\frac{V_C}{V_B}\frac{V_A}{V_D})^{\gamma-1}\frac{T_C}{T_B} = (\frac{V_C}{V_B}1)^{\gamma-1}\frac{V_C}{V_B} = (\frac{V_C}{V_B})^{\gamma-1}$$
Quindi
$$\eta = 1 - \frac{1}{\gamma}\frac{r^{1-\gamma}|1 - r_{CB}^{\gamma}|}{r_{CB} - 1}$$
Si dovrebbe esprimere $r_{CB} = rt^{1/(\gamma-1)}$... Un gas monoatomico sarebbe più efficiente di uno biatomico per $r \approx 10$...

Appendice A

Unità e prefissi SI

Esercizio 147: Prefissi SI

Quali dei seguenti prefissi SI sono veri?

10^{24}	yotta	Y	10^{23}	jalta	J	10^{22}	astro	A	10^{21}	zenta	Z	10^{20}	venta	V
10^{19}	viva	W	10^{18}	exa	E	10^{17}	super	S	10^{16}	feta	F	10^{15}	peta	P
10^{14}	pita	I	10^{13}	toto	O	10^{12}	tera	T	10^{11}	ultra	Y	10^{10}	plati	Π
10^{9}	giga	G	10^{8}	hocto	H	10^{7}	maxi	X	10^{6}	mega	M	10^{5}	midi	D
10^{4}	hectare	H	10^{3}	kilo	k	10^{2}	hecto	h	10^{1}	deka	da	10^{0}	uni	u
10^{-1}	deci	d	10^{-2}	centi	c	10^{-3}	milli	m	10^{-4}	mini	i	10^{-5}	tini	t
10^{-6}	micro	μ	10^{-7}	picro	ρ	10^{-8}	angs	A	10^{-9}	nano	n	10^{-10}	crono	c
10^{-11}	neuro	ν	10^{-12}	pico	p	10^{-13}	chico	χ	10^{-14}	nino	ι	10^{-15}	femto	f
10^{-16}	euro	ϵ	10^{-17}	pinta	π	10^{-18}	atto	a	10^{-19}	lotto	l	10^{-20}	gatto	g
10^{-21}	zepto	z	10^{-22}	puffo	f	10^{-23}	uffa	u	10^{-24}	yocto	y	10^{-25}	yatta	υ

✍**Soluzione**: Quelli ben noti, e tutti i multipli di 3