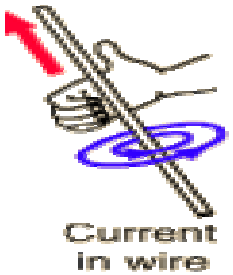
L'INDUTTANZA

RIASSUNTO:

- Richiami su campo magnetico, forza di Lorentz…
- Legge di Faraday
- Autoinduzione (dimensioni L)
- L'induttanza come elemento di circuito
- Circuito RL:
    - extracorrente di apertura
- Energia immagazzinata in una induttanza
- Circuito RLC: oscillazioni smorzate

Richiami sul campo magnetico

• Un filo percorso da corrente genera intorno a sè un campo magnetico le cui linee di forza sono anelli che girano intorno al filo. La direzione del campo magnetico segue la regola della mano destra.



• La forza di Lorentz:

Una carica che si muove in un campo magnetico risente una forza F (forza di Lorentz) data da :

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

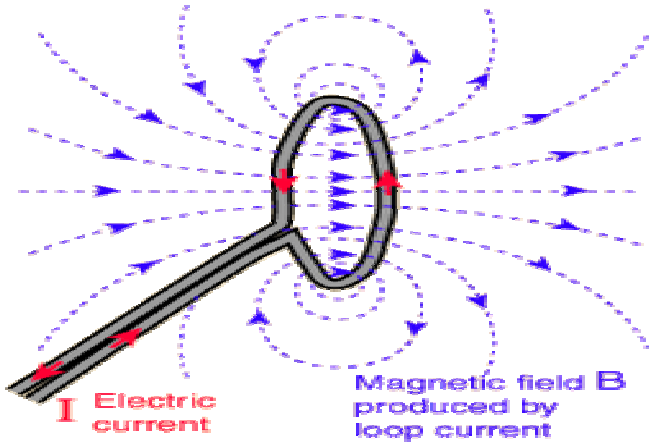
•Anche un filo percorso da corrente, essendo composto da cariche in movimento, subisce una forza dovuta al campo magnetico:

$$d\vec{F} = I\, d\vec{l} \times \vec{B}$$

Esempi

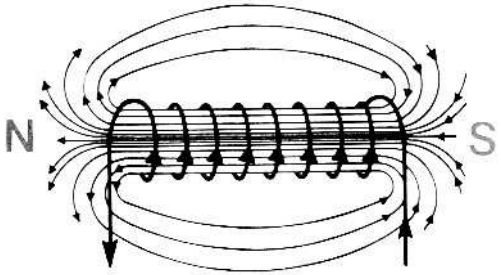
•Spira circolare di raggio R percorsa da corrente. Sull'asse, a distanza z dal centro, il campo vale:

$$\vec{B} = \mu_0 \frac{2IR}{\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}}$$



•Solenoide di lunghezza h composto da N spire affiancate. Dentro il solenoide il campo è pressoché uniforme e vale:

$$B = \mu_0 I \frac{N}{h}$$



Cos’è la f.e.m.?

- La forza elettromotrice di un generatore è definita come il lavoro effettuato per portare una unità di carica da un estremo all’altro di un circuito.
- Nel caso di una pila, la f.e.m è uguale alla differenza di potenziale ai suoi capi.
- Spesso i concetti di differenza di potenziale e f.e.m. si confondono, in quanto i valori numerici coincidono in molti casi.
- Nel caso in cui solo i campi elettrici entrino in gioco, la f.e.m. è uguale all’integrale del campo elettrico nel circuito.
- Nel caso in cui i circuiti si muovano all’interno di un campo elettromagnetico, allora anche la forza di Lorentz entra nel conteggio.
- La f.e.m. si può definire anche quando i campi non sono conservativi.

La legge di Faraday

- In un circuito immerso in un campo magnetico si produce una f.e.m. pari alla derivata rispetto al tempo del flusso del campo magnetico attraverso il circuito stesso:

$$f.e.m. = -\frac{d\Phi(B)}{dt}$$

- La variazione del flusso può essere causata dal movimento della spira in un campo non omogeneo, dal movimento delle sorgenti del campo, o infine da una dipendenza rispetto al tempo delle correnti che producono il campo magnetico.

Esempio

- Una spira metallica piana, di area A ricavata da un filo di resistenza R si trova immersa in un campo magnetico B uniforme.
- Il campo forma con la normale alla spira un angolo θ=0.

  Il campo inoltre varia secondo la regola $B=B_0\cos(2\pi f t)$
- Il flusso attraverso la spira vale allora: $\Phi(t) = B_0 A\cos(2\pi f t)$
- La f.e.m. vale quindi: $\varepsilon = -\dfrac{d\Phi}{dt} = 2\pi f B_0 A\sin(2\pi f t)$
- La corrente indotta infine vale:

$$i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{2\pi f B_0 A}{R}\sin(2\pi f t)$$

Autoinduzione

- Si consideri una semplice spira percorsa da una corrente i variabile nel tempo: la corrente produce un campo magnetico, e quindi un flusso di campo all'interno della spira.
- Ai capi della spira si produce allora una f.e.m. che si oppone alla variazione della corrente: se, ad esempio, la corrente diminuisce in modulo, la f.e.m. prodotta tende a farla aumentare, se invece aumenta, tende a farla diminuire.
- La f.e.m. è proporzionale alla derivata del campo B. Questo è proporzionale alla corrente che scorre nella spira. Si ha in definitiva una relazione del tipo:

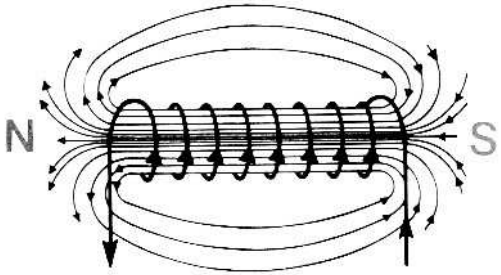
$$f.e.m. = -L\frac{di(t)}{dt}$$

- La costante L si chiama induttanza della spira. Una formula analoga vale per circuiti formati da più spire. L dipende solo dalla geometria del circuito.

Esempio

- Un solenoide è costituito da N spire avvolte strettamente intorno ad un cilindro di raggio R e altezza h.
- Nell'approssimazione in cui h>>R, il campo magnetico all'interno del solenoide, quando questo è percorso da una corrente i, è dato dalla formula:

$$B = \mu_0 \frac{Ni}{h}$$



- Il flusso di B attraverso il solenoide sarà N volte quello attraverso la singola spira, e quindi:

$$\Phi(B) = N\mu_0 \frac{Ni}{h} \pi R^2$$

- La f.e.m. auto-indotta risulta allora: $f.e.m. = -\frac{d\Phi(B)}{dt} = -\mu_0 \frac{N^2}{h} \pi R^2 \frac{di}{dt} = -L\frac{di}{dt}$

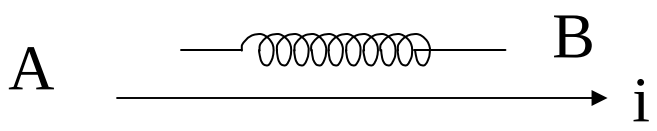
$$L = \mu_0 \frac{N^2}{h} \pi R^2$$

Unità di misura

- Nel sistema MKS il campo magnetico si misura in Tesla (T).
- Il flusso si misura in Weber, corrispondente ad 1 Tesla x 1 metro quadro.
- L'induttanza si misura allora in Weber/Ampere, unità di misura cui si dà il nome di Henry (H).
- Nella pratica, l'unità più utilizzata è il mH: le induttanze utilizzate nei circuiti, acquistabili commercialmente, hanno induttanze di qualche centinaio di mH. Gli avvolgimenti presenti nei motori e nei trasformatori hanno spesso induttanze superiori.
- Per aumentare l'induttanza, si usa avvolgere la bobina intorno ad un nucleo di metallo: in questo caso l'induttanza viene ad aumentare di un fattore μ_r, una costante tipica del metallo utilizzato, detta permeabilità magnetica relativa, che può valere anche 10^3 - 10^4

Elemento induttivo in un circuito

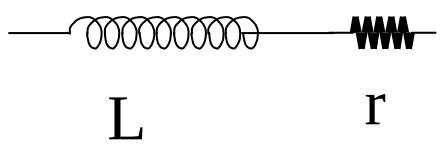
- Una bobina, una spira od anche un pezzo di filo eccessivamente lungo in un circuito costituiscono quello che si dice elemento induttivo, o induttore.
- Il simbolo di un induttore è il seguente:



- La caratteristica tensione corrente di un induttore, in base alla leggere di Faraday, è data da:

$$V_A - V_B = L\frac{di(t)}{dt}$$

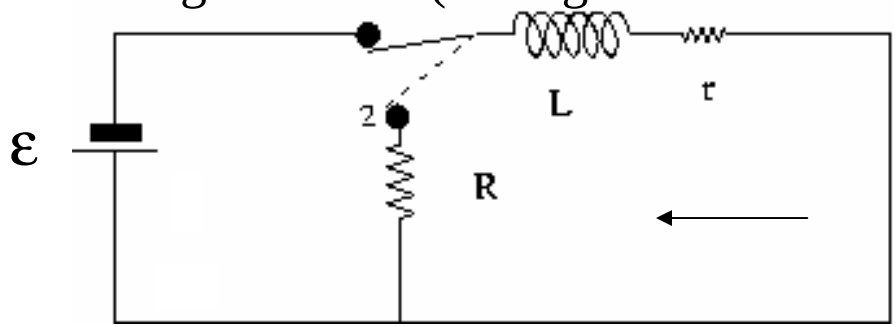
- Quasi sempre, però, conviene porre in evidenza la resistenza interna r del filo che costituisce l'induttanza: in questo caso il simbolo si modifica:



$$V_A - V_B = L\frac{di(t)}{dt} + ri$$

Circuiti RL

- Si consideri il circuito seguente (analogo della carica del condensatore):



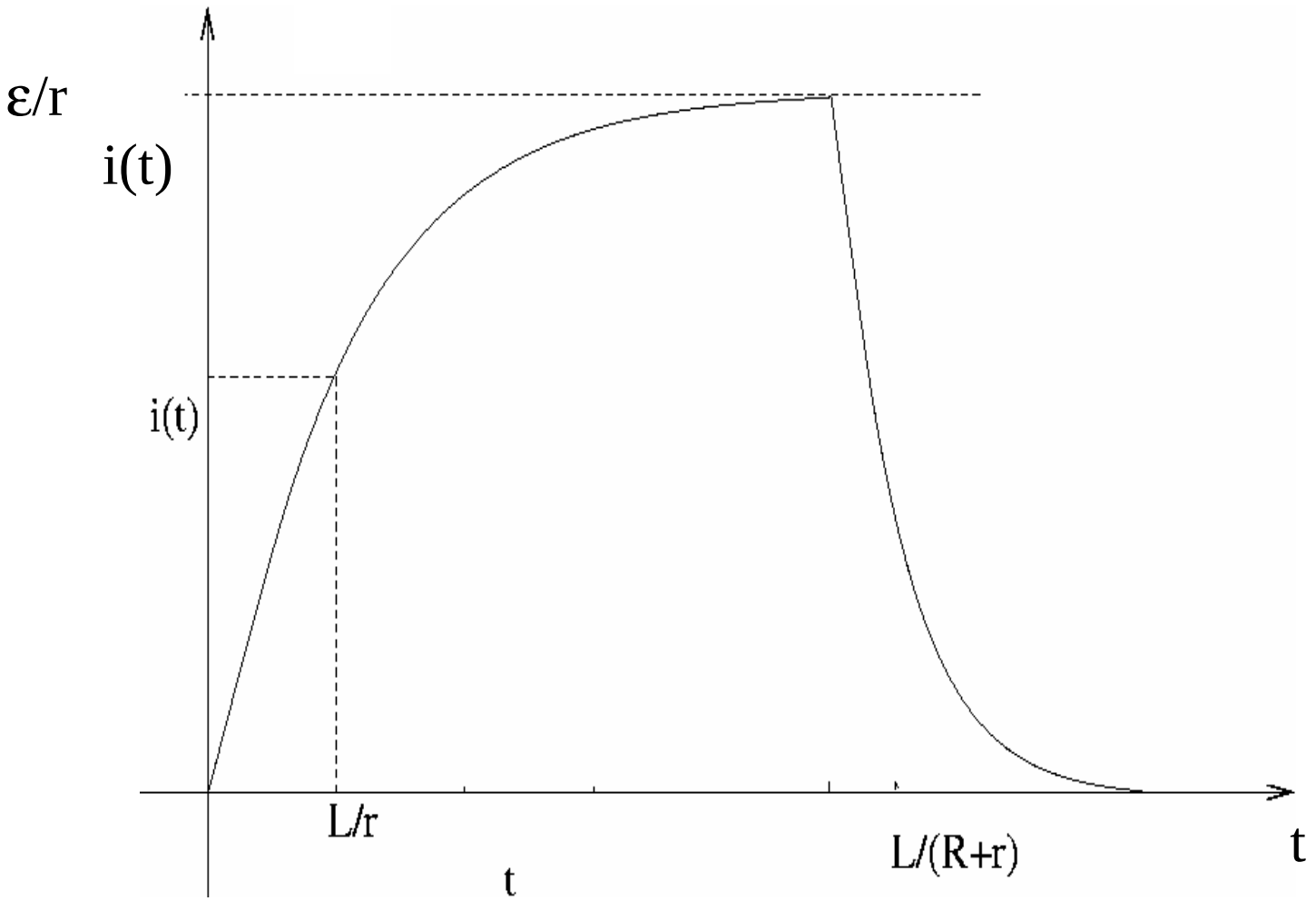
- Quando l'interruttore si trova collegato alla batteria nella posizione 1, l'equazione della maglia dà:

$$ri + L\frac{di}{dt} = \varepsilon \quad \xrightarrow{\text{c.i. } i(t=0)=0} \quad i = \frac{\varepsilon}{r}\left(1 - e^{-\frac{t}{L/r}}\right)$$

- Quando l'interruttore viene portato nella posizione 2 si ha invece:

$$(r+R)i + L\frac{di}{dt} = 0 \quad \xrightarrow{\text{c.i. } i(t=0)=\varepsilon/r} \quad i = \frac{\varepsilon}{r} e^{-\frac{t}{L/(r+R)}}$$

Grafico della corrente

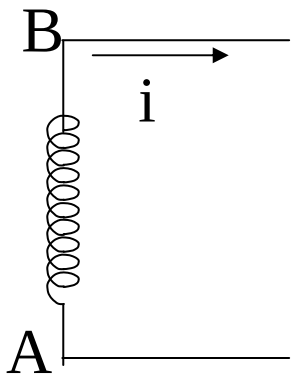


Extracorrente ed extratensione

- Come si può vedere, anche dopo la sconnessione del generatore, la corrente continua a scorrere nel circuito. L'induttanza si "oppone" alla variazione della corrente. La tensione ai capi dell'induttanza e della resistenza R è data da $V = Ri$.

  Se R è molto grande (ovvero, se l'interruttore anziché chiudersi su un carico viene lasciato aperto) la corrente scende molto rapidamente, e la tensione assume valori molto grandi, al punto da poter danneggiare il circuito.
- Si parla allora di extracorrenti ed extratensioni di apertura. Analogamente, la differenza tra la corrente a regime e quella reale si dice extracorrente di chiusura.

Energia immagazzinata



- La potenza fornita da un induttore è data da:

$$P = (V_B - V_A)i = -L\frac{di}{dt}i = -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)$$

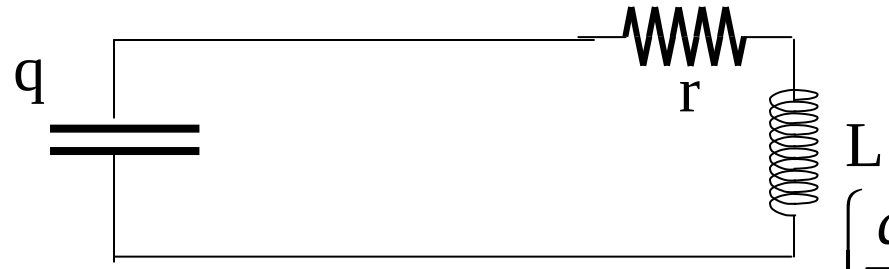
- Si può osservare che:
  - Se la corrente aumenta in modulo, P è negativa: l'induttore assorbe energia
  - Se la corrente diminuisce in modulo, P è positiva: l'induttore fornisce energia
  - La potenza è un differenziale esatto.
- Riesce naturale identificare l'energia immagazzinata in un induttore con la quantità:

$$U = \frac{1}{2}Li^2$$

- Dal punto di vista energetico, l'induttore è quindi un "serbatoio" di energia, associata alla corrente che vi scorre (in analogia con il condensatore, in cui l'energia è associata alla carica immagazzinata).

Circuito RLC

- Si consideri il circuito seguente (c.i.: $q(t=0)=q_0$, $dq/dt(t=0) = 0$):



- Le equazioni della maglia danno:

$$\begin{cases} \dfrac{q}{C} - ri - L\dfrac{di}{dt} = 0 \\ -\dfrac{dq}{dt} = i \end{cases}$$

$$\frac{q}{C} + r\frac{dq}{dt} + L\frac{d^2q}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{r}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0$$

- la soluzione (per $\left(\frac{r}{L}\right)^2 < \frac{4}{LC}$) è un'oscillazione smorzata:

$$q = q_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(2\pi f t)$$

$$\tau = \frac{2L}{r} \qquad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{r}{2L}\right)^2}$$

Soluzione RLC

- Si cercano soluzioni del tipo $e^{\lambda t}$. La sol. e' la sovrapposizione: $q(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$
- L'eq. caratteristica: $$\lambda^2 + \frac{r}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0$$

Ha $\Delta = -4\left[\frac{1}{LC} - \left(\frac{r}{2L}\right)^2\right]$

1. Per $\left(\frac{r}{2L}\right)^2 < \frac{1}{LC}$ le radici dell'eq. caratteristica sono complesse:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{r}{2L} \mp i\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{r}{2L}\right)^2}$$

$$q(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\tau = \frac{2L}{r}$$

$$\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{r}{2L}\right)^2}$$

La soluzione q(t) deve essere reale:

(si determinano i 2 parametri A e ϕ imponendo le condizioni iniziali: $A=q_0$ e $\phi=0$)

Soluzione RLC (continua)

2. Per $\left(\frac{r}{2L}\right)^2 > \frac{1}{LC}$

Le radici sono reali ed entrambe negative
(le costanti A_1 e A_2 da det. imponendo le c.i.)
La resistenza e' sufficientemente grande
da impedire le oscillazioni.

$$\lambda_{1,2} = -\frac{r}{2L} \mp \sqrt{\left(\frac{r}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

$$q(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$$

3. Per $\left(\frac{r}{2L}\right)^2 = \frac{1}{LC}$

Condizione di smorzamento critico.
La soluzione e':
(al piu' si ha un solo attraversamento dell'asse delle ascisse)
Le 2 costanti sono da det. dalle c.i.

$$q(t) = (A_1 + A_2 t)e^{\lambda t}$$

$$\lambda = -\frac{r}{2L}$$