## 2.5. Moto parabolico

Analizziamo un semplice moto uniformemente accelerato in due dimensioni, definito dalla legge oraria

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \tag{2.5.1}$$

Per concretezza siamo interessati al caso in cui $\vec{a}$ è l'accelerazione di gravità. Sceglieremo un sistema di riferimento nel quale

$$\vec{a} = -g\hat{e}_y \tag{2.5.2}$$

Possiamo inoltre scrivere

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x\hat{e}_x + y\hat{e}_y \\ \vec{r}_0 &= \vec{0} \\ \vec{v}_0 &= v_{0x}\hat{e}_x + v_{0y}\hat{e}_y \end{aligned} \tag{2.5.3}$$

e ottenere le leggi orarie

$$x = v_{0x}t \tag{2.5.4}$$

$$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{2.5.5}$$

**Esercizio 27.** Derivare le relazioni (2.5.4) e (2.5.5) dalle definizioni precedenti.

Facendo il prodotto scalare di ambo i membri della (2.5.1) con $\hat{e}_x$ otteniamo

$$\vec{r}\cdot\hat{e}_x = \vec{r}_0\cdot\hat{e}_x + \vec{v}_0\cdot\hat{e}_x t + \frac{1}{2}\vec{a}\cdot\hat{e}_x t^2 \tag{2.5.6}$$

ma dalle definizioni (2.5.2) e (2.5.3) segue che $\vec{r}_0\cdot\hat{e}_x = 0$, $\vec{r}\cdot\hat{e}_x = x$, $\vec{v}\cdot\hat{e}_x = v_{0x}$ e $\vec{a}\cdot\hat{e}_x = 0$, quindi otteniamo l'Equazione (2.5.4). Analogamente prendendo il prodotto scalare con $\hat{e}_y$ abbiamo

$$\vec{r}\cdot\hat{e}_y = \vec{r}_0\cdot\hat{e}_y + \vec{v}_0\cdot\hat{e}_y t + \frac{1}{2}\vec{a}\cdot\hat{e}_y t^2 \tag{2.5.7}$$

e usando $\vec{r}_0\cdot\hat{e}_y = 0$, $\vec{r}\cdot\hat{e}_y = y$, $\vec{v}\cdot\hat{e}_y = v_{0y}$ e $\vec{a}\cdot\hat{e}_y = -g$ ottenamo l'Equazione (2.5.5).

Le leggi orarie danno una descrizione completa del moto. In particolare possiamo ottenere le componenti della velocità. In notazione vettoriale abbiamo

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

e quindi (usando la relazione precedente oppure derivando le (2.5.4) e (2.5.5))

$$\dot{x} = v_{0x} \tag{2.5.8}$$

$$\dot{y} = v_{0y} - gt \tag{2.5.9}$$

Analogamente possiamo ottenere l'accelerazione

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \\
\ddot{x} &= 0 \\
\ddot{y} &= -g
\end{aligned}$$

□

In certi casi può essere utile avere a disposizione una relazione diretta tra coordinata $x$ e coordinata $y$ che esprima la traiettoria. Questo si può ottenere facilmente eliminando il tempo dalle leggi orarie. Abbiamo

$$y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x - \frac{1}{2} \frac{g}{v_{0x}^2} x^2 \tag{2.5.10}$$

**Esercizio 28.** Derivare l'equazione precedente

Dalla (2.5.4) otteniamo

$$t = \frac{x}{v_{0x}}$$

e sostituendo nella (2.5.5) troviamo

$$y = v_{0y} \left( \frac{x}{v_{0x}} \right) - \frac{1}{2} g \left( \frac{x}{v_{0x}} \right)^2$$

cioè la (2.5.10).

□

**Esercizio 29** (Lancio del peso)**.** Considerare la traiettoria di un peso lanciato da un'altezza $h$ con velocità iniziale $v_0$ inclinata rispetto all'orizzontale di un angolo $\alpha$. Determinare $\alpha$ in modo che la gittata sia massima. Una simulazione del problema si può trovare all'indirizzo `http://www.df.unipi.it/~cella/simul/lanciodelpeso/index.html`.

Scriviamo le leggi orarie. Abbiamo

$$\begin{aligned}
x(t) &= v_0 \cos \alpha t \\
y(t) &= h + v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2
\end{aligned}$$

Il peso arriverà al suolo quando $y = 0$, cioè al tempo $\tau$ determinato da

$$y(\tau) = h + v_0 \sin \alpha \tau - \frac{1}{2} g \tau^2 = 0$$

Risolvendo l'equazione troviamo

$$\tau = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \pm \sqrt{\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2} + \frac{2h}{g}}$$

e tra le due soluzioni quella accettabile è la positiva. Calcolando $x(\tau)$ troviamo la gittata $\ell$

$$\ell = x(\tau) = \frac{v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g} + \cos\alpha\sqrt{\left(\frac{v_0^2}{g}\right)^2 \sin^2\alpha + \frac{2hv_0^2}{g}} \tag{2.5.11}$$

Troviamo il massimo di $\ell$ rispetto ad $\alpha$. Derivando abbiamo

$$\begin{aligned}\frac{d\ell}{d\alpha} = {} & \frac{v_0^2}{g}\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) - \sin\alpha\sqrt{\left(\frac{v_0^2}{g}\right)^2 \sin^2\alpha + \frac{2hv_0^2}{g}} \\ & + \frac{\left(\frac{v_0^2}{g}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{v_0^2}{g}\right)^2 \sin^2\alpha + \frac{2hv_0^2}{g}}}\sin\alpha\cos^2\alpha = 0\end{aligned}$$

e moltiplicando per il denominatore dell'ultimo termine

$$\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right)\sqrt{\sin^2\alpha + \frac{2hg}{v_0^2}} = \sin\alpha\left(\sin^2\alpha + \frac{2hg}{v_0^2} - \cos^2\alpha\right)$$

Eleviamo al quadrato ambo i membri

$$\left(1 - 2\sin^2\alpha\right)^2\left(\sin^2\alpha + \frac{2hg}{v_0^2}\right) = \sin^2\alpha\left(2\sin^2\alpha + \frac{2hg}{v_0^2} - 1\right)^2$$

e semplificando otteniamo

$$1 - \left(2 + \frac{2hg}{v_0^2}\right)\sin^2\alpha = 0$$

da cui, ponendo $\Pi = hg/v_0^2$

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\Pi}$$

Per $h = 0$ questo si riduce a $\sin^2\alpha = 1/2$, cioè $\alpha = \pi/4$, come deve essere. Per $h \gg v_0^2/g$ $\sin^2\alpha = 0$, quindi conviene lanciare il proiettile in orizzontale. Calcoliamo adesso la gittata massima. Riscriviamo la (2.5.11) nella forma

$$\ell = \frac{v_0^2}{g}\sqrt{1 - \sin^2\alpha}\left[\sin\alpha + \sqrt{\sin^2\alpha + 2\Pi}\right]$$

e sostituendo il valore di $\sin\alpha$ precedentemente determinato troviamo

$$\ell = \frac{v_0^2}{g}\sqrt{1 + 2\Pi} = \frac{v_0^2}{g}\sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2}}$$

Per $h = 0$ $(\Pi = 0)$ abbiamo $\ell = v_0^2/g$. Per $g \gg v_0^2/g$ $(\Pi \gg 1)$ otteniamo

$$\ell \simeq v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

□

**Esercizio 30** (Salto in lungo)**.** Un saltatore in lungo arriva alla fine della rincorsa con una velocità orizzontale $v_L$. A questo punto salta in una direzione che, nel suo sistema di riferimento, forma un angolo $\alpha$ rispetto all'orizzontale. Sempre nel suo sistema di riferimento il modulo della velocità immediatamente successiva al salto è $v_0$.

Determinare l'angolo $\alpha$ che corrisponde alla massima lunghezza del salto e calcolare l'angolo $\alpha'$ corrispondente nel sistema solidale al suolo.

Nel sistema di riferimento del saltatore la leggi orarie per il moto orizzontale e verticale saranno

$$\begin{aligned} x &= (v_0 \cos\alpha)\, t \\ y &= (v_0 \sin\alpha)\, t - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}$$

Dato che il sistema di riferimento considerato si muove orizzontalmente con velocità $v_L$ rispetto al suolo, avremo che nel sistema solidale a quest'ultimo

$$\begin{aligned} x' &= (v_L + v_0 \cos\alpha)\, t \\ y' &= (v_0 \sin\alpha)\, t - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}$$

e il saltatore toccherà di nuovo terra quando $y = y' = 0$, cioè per

$$t^* = \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g}$$

Sostituendo troviamo la lunghezza del salto (poniamo $\beta = v_L/v_0$ per semplicità)

$$\Delta X(\alpha) = x'(t^*) = \left(\frac{2v_0^2}{g}\right)(\beta + \cos\alpha)\sin\alpha$$

che dobbiamo rendere massima variando $\alpha$ nell'intervallo $0 < \alpha < \pi$.

Notiamo prima di tutto che non si può avere un massimo assoluto per $\alpha > \pi/2$, infatti

$$\begin{aligned} \Delta X\left(\frac{\pi}{2} + \delta\right) &= \left(\frac{2v_0^2}{g}\right)(\beta - \sin\delta)\cos\delta \\ \Delta X\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) &= \left(\frac{2v_0^2}{g}\right)(\beta + \sin\delta)\cos\delta \end{aligned}$$

e quindi è sempre

$$\Delta X\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \geq \Delta X\left(\frac{\pi}{2} + \delta\right)$$

Derivando

$$\frac{d\ell}{d\alpha} = \left(\frac{2v_0^2}{g}\right)\left(\beta\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1\right) = 0$$

e risolvendo l'equazione di secondo grado in $\cos\alpha$ otteniamo

$$\cos\alpha = -\frac{\beta}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{16}\beta^2}$$

Per quanto detto la soluzione accettabile è quella positiva, che corrisponde ad un salto di

$$\Delta X = \left(\frac{2v_0^2}{g}\right)\left(\frac{3}{4}\beta + \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{16}\beta^2}\right)\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\beta^2}{8} + \frac{\beta}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{16}\beta^2}}$$

Consideriamo alcuni casi particolari. Per $v_L \ll v_0$ abbiamo $\beta \ll 1$, quindi

$$\cos\alpha = -\frac{\beta}{4} + \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{16}\beta^2} \simeq \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\beta}{4} + O\left(\beta^2\right)$$

e quindi l'angolo è leggermente superiore a $\alpha = \pi/4$. Per avere una stima più precisa poniamo $\alpha = \pi/4 + \varepsilon$, dove $\varepsilon \ll 1$. Abbiamo

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi}{4} + \varepsilon\right) &\simeq \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\beta}{4} \\
\cos\frac{\pi}{4}\cos\varepsilon - \sin\frac{\pi}{4}\sin\varepsilon &\simeq \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\beta}{4} \\
\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon &\simeq \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\beta}{4} \\
\varepsilon &\simeq \frac{\sqrt{2}}{4}\beta
\end{aligned}$$

da cui

$$\alpha \simeq \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}\beta$$

Per quanto riguarda la distanza

$$\begin{aligned}
\Delta X &\simeq \left(\frac{v_0^2}{g}\right)\left(1 + \frac{3\sqrt{2}}{4}\beta\right)\sqrt{1 + \frac{\beta}{\sqrt{2}}} \\
&\simeq \left(\frac{v_0^2}{g}\right)\left(1 + \sqrt{2}\beta\right)
\end{aligned}$$

leggermente superiore al valore che si ottiene in un salto da fermo.

Se invece $v_L \gg v_0$ abbiamo $\beta \gg 1$ e quindi

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{\beta}{4}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{8}{\beta^2}}\right) \\
&= \frac{2}{\beta}\frac{1}{1 + \sqrt{1 + \frac{8}{\beta^2}}} \simeq \frac{1}{\beta}
\end{aligned}$$