2.6. Moto su una spirale

Una spirale a passo costante è descritta in coordinate polari dalla relazione

$$r = \frac{p}{2\pi}\theta$$

dove p è il passo (dimensionalmente $[p] = L$). Per semplicità faremo assumere a θ qualsiasi valore reale e positivo: occorre tenere conto che in questo modo non si ha corrispondenza biunivoca tra un punto del piano e una coppia di coordinate, ad esempio (r, θ), $(r, \theta + 2\pi)$, $(r, \theta + 4\pi)$ e così via corrispondono allo stesso punto. Potremmo più correttamente scrivere la traiettoria nella forma

$$\begin{aligned} r &= \frac{p}{2\pi}u \\ \theta &= u \pmod{2\pi} \end{aligned}$$

introducendo il parametro u. La relazione tra r e θ è lineare: questo significa che ad ogni giro la spirale si allontana dall'origine della quantità costante p. Supponiamo che la spirale rappresenti la traiettoria della puntina di un giradischi (nel sistema solidale con il disco stesso), e che quindi la velocità angolare sia costante.

Esercizio 31 (Legge oraria.)**.** Determinare la legge oraria della puntina.

Dato che la velocità angolare è costante, abbiamo

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega$$

e quindi $\theta = \omega t + \theta_0$. Prendendo $\theta_0 = 0$ per semplicità troviamo

$$\begin{aligned} r &= \frac{p\omega}{2\pi}t \\ \theta &= \omega t \end{aligned}$$

In forma vettoriale

$$\vec{r} = r\hat{e}_r = r\begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\omega t \\ \sin\omega t\end{pmatrix}\frac{p\omega}{2\pi}t$$

Esercizio 32 (Velocità.)**.** Determinare la velocità della puntina. Determinarne in particolare le componenti dirette lungo $\hat{e}_r$ e $\hat{e}_\theta$, la componente tangenziale e la componente normale alla traiettoria.

Derivando il vettore posizione si ottiene la velocità:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{e}_r + r\frac{d\hat{e}_r}{dt}$$

ma

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{p\omega}{2\pi}t = \frac{p\omega}{2\pi}$$

e

$$\frac{d\hat{e}_r}{dt} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\cos\omega t\\ \sin\omega t\end{pmatrix} = \omega\begin{pmatrix}-\sin\omega t\\ \cos\omega t\end{pmatrix} = \omega\hat{e}_\theta$$

e quindi

$$\vec{v} = \frac{p\omega}{2\pi}\hat{e}_r + \frac{p\omega^2}{2\pi}t\hat{e}_\theta$$

In questa forma sono esplicite le componenti dirette lungo $\hat{e}_r$ e $\hat{e}_\theta$. Per definizione la velocità è tangente alla traiettoria: quindi la componente normale è nulla. Per trovare la componente tangente è sufficiente confrontare l'espressione precedente con

$$\vec{v} = v\hat{\tau}$$

dove $\hat{\tau}$ è il versore tangente. Calcolando il modulo della velocità troviamo

$$\begin{aligned} v = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}} &= \sqrt{\left(\frac{p\omega}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{p\omega^2 t}{2\pi}\right)^2} \\ &= \frac{p\omega}{2\pi}\sqrt{1+\omega^2 t^2} \end{aligned}$$

Vediamo che v cresce al passare del tempo. Tornando all'espressione della velocità scriviamo adesso

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{p\omega}{2\pi}\left(\hat{e}_r + \omega t\hat{e}_\theta\right) \\ &= \frac{p\omega}{2\pi}\sqrt{1+\omega^2t^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2t^2}}\hat{e}_r + \frac{\omega t}{\sqrt{1+\omega^2t^2}}\hat{e}_\theta\right) \\ &= v\left(\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2t^2}}\hat{e}_r + \frac{\omega t}{\sqrt{1+\omega^2t^2}}\hat{e}_\theta\right) \end{aligned}$$

che ci fornisce una espressione esplicita per il versore tangente:

$$\hat{\tau} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2t^2}}\hat{e}_r + \frac{\omega t}{\sqrt{1+\omega^2t^2}}\hat{e}_\theta$$

Calcoliamo infine l'angolo tra il versore tangente e i versori $\hat{e}_r$ ed $\hat{e}_\theta$. Possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \hat{e}_r\cdot\hat{\tau} &= \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2t^2}} \\ \hat{e}_\theta\cdot\hat{\tau} &= \frac{\omega t}{\sqrt{1+\omega^2t^2}} \end{aligned}$$

Vediamo che quando $\omega t \gg 1$ il versore tangente è sempre più allineato al versore $\hat{e}_\theta$.

Esercizio 33 (Accelerazione)**.** Determinare l'accelerazione della puntina. Determinarne in particolare le componenti dirette lungo $\hat{e}_r$ e $\hat{e}_\theta$, la componente tangenziale e la componente normale alla traiettoria.

Deriviamo la velocità rispetto al tempo. Abbiamo

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} \\ &= \frac{d}{dt}\left[\frac{p\omega}{2\pi}\hat{e}_r + \frac{p\omega^2}{2\pi}t\hat{e}_\theta\right] \\ &= \frac{p\omega}{2\pi}\frac{d\hat{e}_r}{dt} + \frac{p\omega^2}{2\pi}\hat{e}_\theta + \frac{p\omega^2}{2\pi}t\frac{d\hat{e}_\theta}{dt}\end{aligned}$$

Conosciamo già la derivata del versore $\hat{e}_r$. Quella del versore $\hat{e}_\theta$ si può calcolare direttamente:

$$\frac{d\hat{e}_\theta}{dt} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix}-\sin\omega t \\ \cos\omega t\end{pmatrix} = -\omega\begin{pmatrix}\cos\omega t \\ \sin\omega t\end{pmatrix} = -\omega\hat{e}_r$$

Otteniamo quindi

$$\vec{a} = \frac{p\omega^2}{\pi}\hat{e}_\theta - \frac{p\omega^2}{2\pi}\omega t\hat{e}_r$$

Possiamo adesso ottenere la accelerazione tangenziale:

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\hat{\tau} &= \left(\frac{p\omega^2}{\pi}\hat{e}_\theta - \frac{p\omega^2}{2\pi}\omega t\hat{e}_r\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2t^2}}\hat{e}_r + \frac{\omega t}{\sqrt{1+\omega^2t^2}}\hat{e}_\theta\right) \\ &= \frac{p\omega^2}{2\pi}\frac{\omega t}{\sqrt{1+\omega^2t^2}}\end{aligned}$$

che per $\omega t \gg 1$ tende al valore costante $\frac{p\omega^2}{2\pi}$. Per quanto riguarda la componente normale, è necessario determinare il versore corrispondente. In due dimensioni possiamo costruire direttamente un versore perpendicolare a $\hat{\tau}$ scrivendo

$$\hat{n} = -\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2t^2}}\hat{e}_\theta + \frac{\omega t}{\sqrt{1+\omega^2t^2}}\hat{e}_r$$

e quindi

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\hat{n} &= \left(\frac{p\omega^2}{\pi}\hat{e}_\theta - \frac{p\omega^2}{2\pi}\omega t\hat{e}_r\right)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2t^2}}\hat{e}_\theta + \frac{\omega t}{\sqrt{1+\omega^2t^2}}\hat{e}_r\right) \\ &= -\frac{p\omega^2}{2\pi}\frac{2+\omega^2t^2}{\sqrt{1+\omega^2t^2}}\end{aligned}$$

Esercizio 34. Derivare le espressioni generali per l'accelerazione tangenziale e normale in coordinate polari, e confrontarle con i risultati precedenti.

Seguiamo la stessa procedura utilizzata precedentemente. Derivando il vettore posizione

$$\vec{r} = r\hat{e}_r$$

troviamo

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\hat{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\hat{e}_\theta$$

e derivando ancora

$$\vec{a}=\left[\frac{d^2r}{dt}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\hat{e}_r+\left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}+r\frac{d^2\theta}{dt}\right]\hat{e}_\theta$$

Il modulo della velocità sarà

$$v=\sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}$$

il versore tangente

$$\hat{\tau}=\frac{\vec{v}}{v}=\frac{\frac{dr}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}}\hat{e}_r+\frac{r\frac{d\theta}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}}\hat{e}_\theta$$

e quello normale

$$\hat{n}=-\frac{\frac{dr}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}}\hat{e}_\theta+\frac{r\frac{d\theta}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}}\hat{e}_r$$

Quindi la componente tangenziale della accelerazione vale

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\hat{\tau}&=\left[\frac{d^2r}{dt}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\frac{\frac{dr}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}}+\left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}+r\frac{d^2\theta}{dt}\right]\frac{r\frac{d\theta}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}}\\&=\frac{\frac{d^2r}{dt}\frac{dr}{dt}+r\frac{dr}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+r^2\frac{d\theta}{dt}\frac{d^2\theta}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}}\end{aligned}$$

e la componente normale

$$\vec{a}\cdot\hat{n}=\frac{r\frac{d\theta}{dt}\frac{d^2r}{dt}-r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^3-2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\frac{d\theta}{dt}+r\frac{dr}{dt}\frac{d^2\theta}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}}$$

Nel nostro caso

$$\begin{aligned}r&=\frac{p\omega t}{2\pi}\\\frac{dr}{dt}&=\frac{p\omega}{2\pi}\\\frac{d\theta}{dt}&=\omega\\\frac{d^2r}{dt^2}&=0\\\frac{d^2\theta}{dt}&=0\end{aligned}$$

e sostituendo otteniamo

$$\vec{a}\cdot\hat{\tau} = \frac{r\frac{dr}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}} = \left(\frac{p\omega^2}{2\pi}\right)\frac{\omega t}{\sqrt{1+\omega^2 t^2}}$$

$$\vec{a}\cdot\hat{n} = \frac{-r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^3 - 2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\frac{d\theta}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}} = -\left(\frac{p\omega^2}{2\pi}\right)\frac{2+\omega^2 t^2}{\sqrt{1+\omega^2 t^2}}$$

che coincidono con le espressioni precedenti.

Esercizio 35 (Raggio di curvatura della spirale.)**.** Determinare il raggio di curvatura della spirale in un punto dato.

Sappiamo che l'accelerazione normale alla traiettoria è legata al raggio di curvatura dalla espressiona

$$\vec{a}\cdot\hat{n} = \frac{v^2}{\rho}$$

e quindi utilizzando i risultati precedenti abbiamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho} = \frac{\vec{a}\cdot\hat{n}}{v^2} &= -\left(\frac{p\omega^2}{2\pi}\right)\frac{2+\omega^2 t^2}{\sqrt{1+\omega^2 t^2}}\left(\frac{p\omega}{2\pi}\right)^{-2}\frac{1}{1+\omega^2 t^2} \\ &= -\left(\frac{2\pi}{p}\right)\frac{2+\omega^2 t^2}{(1+\omega^2 t^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

che si può riscrivere in funzione della distanza dall'origine

$$r = \frac{p}{2\pi}\omega t$$

nella forma

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{1}{r}\frac{1+2\left(\frac{p}{2\pi r}\right)^2}{\left[1+\left(\frac{p}{2\pi r}\right)^2\right]^{3/2}}$$

Notare che per $r \gg p$ abbiamo approssimativamente

$$\frac{1}{\rho} \simeq -\frac{1}{r}$$